关于平衡问题的有限理性和良定性 *

丘小玲 †　　彭定涛　　王　春　　陈拼博

(贵州大学数学与统计学院，贵阳 550025)

(†E-mail: xlqiu@gzu.edu.cn)

摘　要　本文首先建立了平衡问题的有限理性模型，证明了大多数的平衡问题在 Baire 分类意义下都是结构稳定的，对 $\varepsilon-$ 平衡也是鲁棒的，然后利用有限理性模型，对平衡问题的良定性进行了统一的研究，得到了平衡问题良定的充分条件，最后给出了平衡问题良定的特征刻画.

关键词　平衡问题；有限理性；结构稳定；良定性；特征刻画

MR(2000) 主题分类　90C48; 91A10; 91A26

中图分类　O177.9

1　引言

设 K 是度量空间 X 中的非空子集， $f: K\times K\to R$ 是一个实值函数，平衡问题是：求 $\overline{x}\in K$, 使 $\forall y\in K$, $f(\overline{x},y)\geq 0$. 此平衡问题简记为 EP(f).

1994 年，Blum 和 Ottli[1] 明确提出了上述平衡问题模型, 并指出它为最优化问题、鞍点问题、纳什平衡问题、变分不等式问题、互补问题、不动点问题等提供了一个统一的框架. 实际上，在此之前已有多位学者已对平衡问题进行了研究，如早在 1955 年 Nikaido 和 Isoda[2] 就将平衡问题模型当作一个辅助的二元函数用来求解纳什平衡点；1972 年， Ky Fan 证明了一个重要的极大极小不等式，后来称之为 Ky Fan 不等式， Ky Fan 不等式与平衡问题是等　的, 因此可以看作平衡问题可解性的最早结果；Gwinner[3] 利用平衡问题为最优化问题和变分不等式问题开发了一个统一的惩罚技巧. 自从 Blum 和 Ottli 明确提出了平衡问题模型后，平衡问题引起很多学者的关注，并取得了丰硕的研究成果，见 [4,5]. 由于平衡问题模型的重要性，目前仍有许多研究者从不同角度对其进行研究，新的研究结果还在不断涌现.

另一方面，经济模型中决策者完全理性的假定大大地限制了它的应用，而有限理

本文 2015 年 11 月 6 日收到. 2016 年 2 月 8 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11401124,71461003), 贵州省科技厅自然科学基金 (黔科合 LH 字 [2016]7424,7425 号) 资助项目.

† 通讯作者.

性的引入打破了这种束缚和限制，引起了研究者的极大关注. 2001 年，Anderlini 和 Canning[6] 建立了一种抽象的有限理性模型，它是一类带有抽象理性函数的参数化的“一般博弈”, 利用该模型他们研究了当 $\varepsilon \to 0$ 时，博弈 λ 的 ε- 平衡点集 $E(\lambda,\varepsilon)$ 对博弈 λ 的平衡点集 $E(\lambda)$ 的结构稳定性和鲁棒性. Yu 和 Yu[7] 将 [6] 中的条件大大减弱，得到了更为深刻的结果，并将结果应用于研究非合作博弈和广义博弈的有限理性和鲁棒性. Yu[8] 又进一步将 [7] 中的主要结果应用于研究多目标博弈和广义多目标博弈的有限理性和鲁棒性. Yu[9,10] 还分别建立了不动点问题和 Ky Fan 不等式问题的有限理性模型.

上述研究工作一个重要的意义是讨论了数学模型的近似解对精确解的逼近性，即解的稳定性. 实际上，关于解的稳定性一个重要的研究方法是良定性研究. 1966 年，为研究最优化问题解的稳定性，Tykhonov[11] 首先提出了良定的概念. Levitin-Polyak[12] 对约束最优化问题提出 Levitin-Polyak 良定的概念. 后来，一些学者认为 Hadamard 曾研究过微分方程的解对参数的连续依赖性，它实质上也是其解的稳定性研究，于是提出了 Hadamard 良定的概念. 关于最优化问题的良定性主要有以上三种形式，当然还有广义 Tykhonov 良定，广义 Hadamard 良定和广义 Levitin-Polyak 良定的概念. 1993 年，Dontchev 和 Zolezzi[13] 对良定最优化问题进行了比较系统的研究. 1995 年，Lucchetti 和 Kevalski 主编的论文集 [14] 除了继续深入研究最优化问题的良定性外，还研究了多目标最优化问题、Nash 平衡问题等的良定性. 关于良定性研究还可见 [15,16].

最近，俞建 [17,18] 利用有限理性模型对非线性问题的不同良定性给出了统一的框架，他还利用该统一框架研究了多种问题的良定性，如最优化问题、多目标优化问题、非合作博弈、广义多目标博弈等，这些研究显示了该统一框架的重要意义.

本文将借助 [17,18] 的统一框架，通过有限理性模型对平衡问题的良定性进行研究. 首先建立平衡问题的有限理性模型，并研究平衡问题解的结构稳定性和鲁棒性，然后利用有限理性模型给出平衡问题良定性的概念，最后研究平衡问题良定的充分条件及其特征刻画.

2 预备知识

在这一节中，我们先回 几个基本概念和结论，并给出后面几节需要用到的若干引理.

定义 2.1[18] 设 X,Λ 是两个拓扑空间，集值映射 $F:\Lambda\to 2^X$, 其中 2^X 表示 X 的所有子集的集合，$\lambda\in\Lambda$,

(1) 如果对 X 中的任意开集 G, $G\supset F(\lambda)$ (或 $G\cap F(\lambda)\neq\emptyset$), 存在 λ 的开邻域 $O(\lambda)$, 使得 $\forall\lambda'\in O(\lambda)$, 有 $G\supset F(\lambda')$(或 $G\cap F(\lambda')\neq\emptyset$), 则称集值映射 F 在 λ 上是上半连续的 (或下半连续的).

(2) 如果 F 在 λ 上既上半连续的又下半连续的，则称集值映射 F 在 λ 上是连续的.

(3) 如果 $\forall\lambda\in\Lambda$, 集值映射 F 在 λ 上是连续的 (或上半连续的，或下半连续的), 则

F 在 Λ 上是连续的 (或上半连续的，或下半连续的).

引理 2.1[19] 设 X 和 Y 是两个度量空间，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一列非空紧集，A 是 X 中的一个非空紧集，$\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中的一个点列，$\{g^n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在 $X\times Y$ 上的一列连续函数. 如果 Hausdorff 距离 $h(A_n,A)\to 0$, $y^n\to y\in Y$, 且 $\sup\limits_{(x,y)\in X\times Y}|g^n(x,y)-g(x,y)|\to 0$, 其中 g 是定义在 $X\times Y$ 上的一个连续函数，则

$$\max_{u\in A_n} g^n(u,y^n)\to \max_{u\in A} g(u,y).$$

定义 2.2[20] 设 X 是度量空间， $f: X\to R$ 是一个实值函数.

(1) 称 f 在 $x_0\in X$ 是上伪连续的，如果对 $x\in X$, $f(x_0)<f(x)$, 必有

$$\limsup_{y\to x_0} f(y)<f(x);$$

(2) 称 f 在 X 上是上伪连续的，如果对每一个 $x\in X$ 都是上伪连续的；

(3) 称 f 在 $x_0\in X$ 是下伪连续的，如果对 $x\in X$, $f(x)<f(x_0)$, 必有

$$f(x)<\liminf_{y\to x_0} f(y);$$

(4) 称 f 在 X 上是下伪连续的，如果对每一个 $x\in X$ 都下伪连续的；

(5) 称 f 在点 $x\in X$ 处是伪连续的，如果 f 在 x 处既上伪连续的又下伪连续的；称 f 在 X 上是伪连续的，如果 f 在 X 中的每一点 $x\in X$ 都是伪连续的.

注 2.1 如果 f 在 X 上是上伪连续的，那么 $-f$ 在 X 上是下伪连续的. 反之也成立.

注 2.2 每一个上 (下) 半连续的函数必是上 (下) 伪连续的，反之不真，见下例.

例 2.1 设 $X=[0,2]$, 定义函数 $f_i: X\to R$, $i=1,2$ 如下：

$$f_1(x)=\begin{cases}1-x, & 0\le x<1,\\ -1, & 1\le x\le 2,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}x-1, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

容易验证 f_1 在 $x=1$ 是上伪连续的而不是上半连续，但 f_2 在 $x=1$ 是下伪连续而不是下半连续的.

注 2.3 设 X 和 Y 是两个度量空间， $f: X\times Y\to R$ 是伪连续的实值函数，则 $\forall\, y\in Y$, $x\to f(x,y)$ 在 X 上是伪连续的.

下面介绍俞建教授给出的一般化的有限理性模型，参见 [18, 180 页].

考虑有限理性模型 $M=\{\Lambda,X,F,\Phi\}$, 其中 Λ 是问题空间， $\forall\,\lambda\in\Lambda$, λ 表示一个非线性问题； $F:\Lambda\to 2^X$ 是一个集值映射， $\forall\,\lambda\in\Lambda$, $F(\lambda)\subset X$ 表示非线性问题 λ 的可行集； $\Phi:\Lambda\times X\to R$ 是理性函数，当 $x\in F(\lambda)$ 时， $\Phi(\lambda,x)\ge 0$, $\forall\,\lambda\in\Lambda$, $\forall\,\varepsilon\ge 0$, $E(\lambda,\varepsilon)=\{x\in F(\lambda):\Phi(\lambda,x)\le\varepsilon\}$ 表示非线性问题 λ 的 ε- 近似解集，当 $\varepsilon=0$ 时，$E(\lambda)=E(\lambda,0)=\{x\in F(\lambda):\Phi(\lambda,x)=0\}$ 表示非线性问题 λ 的解集. 这样， $x\in E(\lambda)$ 当且仅当 $x\in F(\lambda)$ 且 $\Phi(\lambda,x)=0$. 我们总假定 $\forall\,\lambda\in\Lambda, E(\lambda)\ne\emptyset$.

定义 2.3[7] $\forall\lambda\in\Lambda$, 如果 $\forall\delta>0$, $\exists\varepsilon'>0$, 使当 $\varepsilon<\varepsilon'$, $\rho(\lambda,\lambda')<\varepsilon'$ 时，有 $h(E(\lambda',\varepsilon),E(\lambda'))<\delta$, 则称 M 在 λ 对 ε- 近似解是鲁棒的，这里 h 是度量空间 X 上的 Hausdorff 距离.

定义 2.4[7] 如果解映射 $E:\Lambda\to 2^X$ 在 $\lambda\in\Lambda$ 是连续的，则称 M 在 λ 是结构稳定的.

以下结果见 [18, 定理 5.1.1, 定理 5.1.2, 定理 5.1.3].

定理 A 设 (Λ,ρ) 是一个完备度量空间， (X,d) 是一个紧度量空间，集值映射 $F:\Lambda\to 2^X$ 是上半连续的， $\Phi:\Lambda\times X\to R$ 是下半连续的，则下述五个结论成立：

(1) 解映射 $E:\Lambda\to 2^X$ 是上半连续紧值映射；

(2) 存在 Λ 中的一个稠密剩余集 Q, 使 $\forall\lambda\in Q$, M 在 λ 是结构稳定的；

(3) 如果 M 在 $\lambda\in\Lambda$ 是结构稳定的，则 M 在 $\lambda\in\Lambda$ 对 ε- 近似解必是鲁棒的，从而 $\forall\lambda\in Q$, M 在 λ 对 ε- 近似解必是鲁棒的；

(4) $\forall\lambda\in Q$, $\forall\lambda_n\to\lambda$, $\forall\varepsilon_n\to 0$, 必有 $h(E(\lambda_n,\varepsilon_n),E(\lambda))\to 0$;

(5) 如果 $\lambda\in\Lambda$, 且 $E(\lambda)$ 是单点集，则 M 在 $\lambda\in\Lambda$ 必是结构稳定的，在 λ 对 ε- 近似解也必是鲁棒的.

最后，我们回 集合非紧测度的有关知识 (参见 [18, 4 页]):

设 X 是一个完备度量空间， S 是 X 中的有界集， $d(S)=\sup\limits_{x\in S,y\in S}d(x,y)$ 称为 S 的直径，而

$$\alpha(S)=\inf\left\{\delta>0:\text{存在 } X \text{ 中的有限个集 } S_i,\bigcup_i S_i\supset S \text{ 且 } d(S_i)\le\delta\right\}$$

称为 S 的非紧测度.

以下引理可见 [18, 引理 1.1.1].

引理 2.2 设 S 是 X 中的有界集，则 $\alpha(S)=0$ 当且仅当 $\overline{S}$ 是紧集.

3 平衡问题的有限理性

本节中, 我们分别对紧空间和非紧空间中的平衡问题建立有限理性模型, 研究其结构稳定性和鲁棒性.

3.1 紧空间中平衡问题的有限理性

设 X_1 是紧度量空间，令

$$\Lambda_1=\left\{\phi:X_1\times X_1\to R:\quad\begin{array}{l}\forall y\in X_1, x\to\phi(x,y)\text{ 在 } X_1 \text{ 上是上半连续的};\\ \sup\limits_{(x,y)\in X_1\times X_1}|\phi(x,y)|<+\infty;\\ \forall x\in X_1,\phi(x,x)=0;\\ \text{存在 } x\in X_1,\text{ 使 }\forall y\in X_1,\text{ 有 }\phi(x,y)\ge 0.\end{array}\right\}$$

$\forall\,\phi_1,\phi_2\in\Lambda_1$, 定义距离

$$\rho_1(\phi_1,\phi_2)=\sup_{(x,y)\in X_1\times X_1}\big|\phi_1(x,y)-\phi_2(x,y)\big|.$$

引理 3.1 (Λ_1,ρ_1) 是一个完备度量空间.

证 易见 (Λ_1,ρ_1) 是一个度量空间. 设 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Λ_1 中的任意 Cauchy 序列，即 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在正整数 $N_1(\varepsilon)$, 使 $\forall\,m,n\geq N_1(\varepsilon)$, 有

$$\rho_1(\phi_m,\phi_n)=\sup_{(x,y)\in X\times X}|\phi_m(x,y)-\phi_n(x,y)|<\varepsilon.$$

于是存在 $\phi:X_1\times X_1\to R$, 满足 $\forall\,x,y\in X_1$, $\lim\limits_{m\to\infty}\phi_m(x,y)=\phi(x,y)$, 且 $\forall\,n\geq N_1(\varepsilon)$, 有

$$\sup_{(x,y)\in X\times X}|\phi(x,y)-\phi_n(x,y)|\leq\varepsilon.$$

容易证明： $\forall\,y\in X_1$, $x\to\phi(x,y)$ 是上半连续的；

$$\sup_{(x,y)\in X_1\times X_1}|\phi(x,y)|\leq\sup_{(x,y)\in X_1\times X_1}|\phi_n(x,y)|+\varepsilon<+\infty;\qquad\forall\,x\in X_1,\ \ \phi(x,x)=0.$$

因 $\phi_n\in\Lambda_1$, 故 $\exists\,x_n\in X_1$, 使 $\forall\,y\in X_1$, 有 $\phi_n(x_n,y)\geq 0$. 因 X_1 是紧集，不妨设 $x_n\to x\in X_1$. 以下来证明 $\forall\,y\in X_1$, 有 $\phi(x,y)\geq 0$. 事实上，因 $x\to\phi(x,y)$ 上半连续，存在正整数 $N(\varepsilon)\geq N_1(\varepsilon)$, 使 $\forall\,n\geq N(\varepsilon)$, 有

$$\phi(x,y)=[\phi(x,y)-\phi(x_n,y)]+[\phi(x_n,y)-\phi_n(x_n,y)]+\phi_n(x_n,y)>-\varepsilon-\varepsilon=-2\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，必有 $\phi(x,y)\geq 0$. 于是， (Λ_1,ρ_1) 是完备度量空间. 证毕.

$\forall\,\phi\in\Lambda_1$, ϕ 就决定了一个平衡点问题, 其解集为 $E_1(\phi)=\{x\in X_1:\phi(x,y)\geq 0,\ \forall\,y\in X_1\}$. 由 Λ_1 的定义， $E_1(\phi)\neq\emptyset$.

$\forall\,\phi\in\Lambda_1$, $\forall\,x\in X_1$, 定义 $F_1(\phi)=X_1$, 则 $F_1:\Lambda_1\to 2^{X_1}$ 是连续的，定义理性函数

$$\Phi_1(\phi,x)=-\inf_{y\in X_1}\phi(x,y).$$

于是，我们得到平衡问题的有限理性模型 $M_1=\{\Lambda_1,X_1,F_1,\Phi_1\}$.

引理 3.2 $\forall\,\phi\in\Lambda_1$, $\forall\,x\in X_1$, 必有 $\Phi_1(\phi,x)\geq 0$, 且 $\Phi_1(\phi,x)=0$ 当且仅当 $x\in E_1(\phi)$.

证 $\forall\,x\in X_1$, 因 $\inf\limits_{y\in X_1}\phi(x,y)\leq\phi(x,x)=0$, 故 $\Phi_1(\phi,x)=-\inf\limits_{y\in X_1}\phi(x,y)\geq 0$. 如果 $\Phi_1(\phi,x)=0$, 即 $\inf\limits_{y\in X_1}\phi(x,y)=0$, 也即 $\forall\,y\in X_1$, $\phi(x,y)\geq 0$, 因此 $x\in E_1(\phi)$. 反之，如果 $x\in E_1(\phi)$, 则 $\forall\,y\in X_1$, $\phi(x,y)\geq 0$, 故 $\Phi_1(\phi,x)=-\inf\limits_{y\in X_1}\phi(x,y)\leq 0$, 又因为 $\Phi_1(\phi,x)\geq 0$, 故 $\Phi_1(\phi,x)=0$. 证毕.

引理 3.3 $\Phi_1(\phi,x)$ 关于 (ϕ,x) 是下半连续的.

证 只需证明 $\inf\limits_{y\in X_1}\phi(x,y)$ 关于 (ϕ,x) 是上半连续的，即要证明 $\forall\varepsilon>0$, $\forall\phi_n\to\phi$, $\forall x_n\to x$, 存在正整数 N, 使当 $\forall n\geq N$ 时，有

$$\inf_{y\in X_1}\phi_n(x_n,y)<\inf_{y\in X_1}\phi(x,y)+\varepsilon.$$

由 $\phi_n\to\phi$, 存在正整数 $N_1(\varepsilon)$, 使当 $\forall n\geq N_1(\varepsilon)$ 时，有

$$|\phi_n(x_n,y)-\phi(x_n,y)|\leq\rho_1(\phi_n,\phi)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\forall y\in X_1$, 因 $x\to\phi(x,y)$ 是上半连续的，且 $x_n\to x$, 存在正整数 $N(\varepsilon)\geq N_1(\varepsilon)$, 使当 $\forall n\geq N(\varepsilon)$ 时，有

$$\phi(x_n,y)-\phi(x,y)<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是 $\forall n\geq N(\varepsilon)$, 有

$$\begin{aligned}\phi_n(x_n,y)=&[\phi_n(x_n,y)-\phi(x_n,y)]+[\phi(x_n,y)-\phi(x,y)]+\phi(x,y)\\<&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\phi(x,y)=\varepsilon+\phi(x,y),\end{aligned}$$

因此 $\inf\limits_{y\in X_1}\phi_n(x_n,y)<\inf\limits_{y\in X_1}\phi(x,y)+\varepsilon$. 证毕.

定理 3.1 对平衡问题的有限理性模型 $M_1=\{\Lambda_1,X_1,F_1,\Phi_1\}$, 定理 A 的五个结论成立.

证 由引理 3.1, Λ_1 是一个完备度量空间， X_1 是紧度量空间， $F_1:\Lambda\to K(X_1)$ 连续，又由引理 3.3, $\Phi_1(\phi,x)$ 关于 (ϕ,x) 下半连续，故定理 A 的条件全部满足，因此它的五个结论成立．证毕．

注 3.1 在 Λ_1 中没有凸性条件，因为在此结构中已经定义平衡点的存在.

注 3.2 $\forall\varepsilon>0,\phi\in\Lambda_1$, $E_1(\phi,\varepsilon)=\{x\in X_1:\Phi_1(\phi,x)\leq\varepsilon\}=\{x\in X_1:\phi(x,y)\geq-\varepsilon,\ \forall y\in X_1\}$ 是函数 ϕ 在 X_1 中所有 ε- 近似平衡点的集合，$E_1(\phi)=\{x\in X_1:\phi(x,y)\geq 0,\ \forall y\in X_1\}$ 是函数 ϕ 在 X_1 中所有平衡点的集合．由定理 3.1, 存在 Λ_1 中的一个稠密剩余集 Q_1, 使 $\forall\phi\in Q_1$, M_1 在 ϕ 是结构稳定的，对 ε- 近似平衡也是鲁棒的．因 Q_1 是第二纲的，在 Baire 分类的意义下， M_1 对大多数的 $\phi\in\Lambda_1$ 都是结构稳定的，对 ε- 近似平衡也是鲁棒的．至于使 M_1 结构不稳定的点 $\phi\in\Lambda_1$, 它很少，仅构成第一纲集．定理 3.1 更说明， $\forall\phi\in Q_1$, 因 $h(E_1(\phi_n,\varepsilon_n),E_1(\phi))\to 0$ $(\phi_n\to\phi,\varepsilon_n\to 0)$, 可以用近似平衡点集 $E_1(\phi_n,\varepsilon_n)$ 来近似代替平衡点集 $E_1(\phi)$, 也表明平衡点集 $E_1(\phi)$ 是稳定的.

3.2 非紧空间中平衡问题的有限理性

设 X_2 是一个完备度量空间 (不必紧), 令

$$\Lambda_2=\left\{\lambda=(\phi,A):\begin{array}{l}\phi:X_2\times X_2\to R\text{ 是上半连续的;}\\ \sup\limits_{(x,y)\in X_2\times X_2}|\phi(x,y)|<+\infty;\\ \forall x\in X_2,\ \phi(x,x)=0;\\ A\text{ 是 }X_2\text{中的非空紧集,存在 }x\in A,\text{ 使 }\forall y\in A,\text{ 有 }\phi(x,y)\geq 0,\end{array}\right\}$$

$\forall\,\lambda_1=(\phi_1,A_1),\ \lambda_2=(\phi_2,A_2)\in\Lambda_2$, 定义距离

$$\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\sup_{(x,y)\in X_2\times X_2}|\phi_1(x,y)-\phi_2(x,y)|+h(A_1,A_2),$$

其中 h 是 X_2 上的 Hausdorff 距离.

引理 3.4 (Λ_2,ρ_2) 是一个完备度量空间.

证 易见 (Λ_2,ρ_2) 是一个度量空间. 设 $\{\lambda_n=(\phi_n,A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Λ_2 中的任意 Cauchy 序列，即 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在正整数 $N_1(\varepsilon)$, 使 $\forall\,m,n\geq N_1(\varepsilon)$, 有

$$\rho_2(\lambda_m,\lambda_n)=\sup_{(x,y)\in X_2\times X_2}|\phi_m(x,y)-\phi_n(x,y)|+h(A_n,A_m)<\varepsilon.$$

于是存在 $\phi:X_2\times X_2\to R$ 和非空紧集 $A\subset X_2$, 使 $\lim\limits_{m\to\infty}\phi_m(x,y)=\phi(x,y)$, 且 $\forall\,n\geq N_1(\varepsilon)$, 有

$$\sup_{(x,y)\in X\times X}|\phi(x,y)-\phi_n(x,y)|<\varepsilon,\qquad h(A_n,A)<\varepsilon.$$

令 $\lambda=(\phi,A)$, 容易证明： $\phi:X_2\times X_2\to R$ 是上半连续的； $\sup\limits_{(x,y)\in X_2\times X_2}|\phi(x,y)|<+\infty$; $\forall\,x\in X_2$, $\phi(x,x)=0$. 由于 $\lambda_n=(\phi_n,A_n)\in(\Lambda_2,\rho_2)$, 即存在 $x_n\in A_n$, 使得 $\forall\,y\in A_n$, $\phi_n(x_n,y)\geq 0$. 由于 A_n,A 为紧集，且 $A_n\to A$, $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\cup A$ 也是紧集 (见 [21, 引理 1]), 又 $\{x_n\}\subset\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\cup A$, 则 $\{x_n\}$ 必有收敛子列，不妨设 $x_n\to x^*$, 则 $x^*\in A$. $\forall\,y\in A$,

$$\phi(x^*,y)=[\phi(x^*,y)-\phi(x_n,y)]+[\phi(x_n,y)-\phi_n(x_n,y)]+\phi_n(x_n,y)>-2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，得 $\phi(x^*,y)\geq 0$. 因此 $\lambda=(\phi,A)\in(\Lambda_2,\rho_2)$, 即 (Λ_2,ρ_2) 是一个完备度量空间. 证毕.

$\forall\,\lambda=(\phi,A)\in\Lambda_2$, 它给定了一个平衡点问题，其解集 $E_2(\lambda)=\{x\in A:\phi(x,y)\geq 0,\ \forall\,y\in A\}$, 由 Λ_2 的定义， $E_2(\lambda)\neq\emptyset$.

$\forall\,\lambda=(\phi,A)\in\Lambda_2$, $\forall\,x\in X_2$, 定义 $F_2(\lambda)=A$, 则集值映射 $F_2:\Lambda_2\to 2^{X_2}$ 连续，定义理性函数

$$\Phi_2(\lambda,x)=-\inf_{y\in A}\phi(x,y).$$

于是，我们得到平衡问题的有限理性模型 $M_2=\{\Lambda_2,X_2,F_2,\Phi_2\}$.

引理 3.5 $\forall\,\lambda\in\Lambda_2$, $\forall\,x\in X_2$, 则 $\Phi_2(\lambda,x)=0$ 当且仅当 $x\in E_2(\lambda)$.

证 如果 $\Phi_2(\lambda,x)=0$, 即 $\inf\limits_{y\in A}\phi(x,y)=0$, 也即 $\forall\,y\in A$, $\phi(x,y)\geq 0$, 因此 $x\in E_2(\lambda)$. 反之，如果 $x\in E_2(\lambda)$, 则 $\forall\,y\in A,\phi(x,y)\geq 0$, $\Phi_2(\lambda,x)=-\inf\limits_{y\in A}\phi(x,y)\leq 0$, 又 $\inf\limits_{y\in A}\phi(x,y)\leq\phi(x,x)=0$, 故 $\Phi_2(\lambda,x)\geq 0$. 从而 $\Phi_2(\lambda,x)=0$. 证毕.

引理 3.6 $\Phi_2(\lambda,x)$ 关于 (λ,x) 是连续的.

证 $\forall\,\lambda_n\to\lambda$, $\forall\,x_n\to x$, 只需证 $\Phi_2(\lambda_n,x_n)\to\Phi_2(\lambda,x)$. 注意到， $\forall\,\lambda_n\to\lambda$ 蕴含 $\sup\limits_{(x,y)\in X_2\times X_2}|\phi_n(x,y)-\phi(x,y)|\to 0$ 和 $h(A_n,A)\to 0$, 再加上 $x_n\to x$, 由引理 2.1, 得

$\inf\limits_{y\in A_n}\phi_n(x_n,y)\to\inf\limits_{y\in A}\phi(x,y)$, 即 $\Phi_2(\lambda_n,x_n)\to\Phi_2(\lambda,x)$. 证毕.

定理 3.2 对平衡问题的有限理性模型 $M_2=\{\Lambda_2,X_2,F_2,\Phi_2\}$, 定理 A 的五个结论成立.

证 由引理 3.4, Λ_2 是一个完备度量空间, A 是紧度量空间, $F_2:\Lambda\to K(X_2)$ 连续, 又由引理 3.6, $\Phi_2(\lambda,x)$ 关于 (λ,x) 连续, 故定理 A 的五个结论成立. 证毕.

注 3.3 与注 3.2 类似, 由定理 3.2, 存在 Λ_2 中的一个稠密剩余集 Q_2, 使 $\forall\lambda=(\phi,A)\in Q_2$, M_2 在 λ 是结构稳定的, 对 ε- 近似平衡也是鲁棒的. 因 Q_2 是第二纲的, 在 Baire 分类的意义下, M_2 对大多数的 $\lambda\in\Lambda_2$ 都是结构稳定的,对 ε- 近似平衡也是鲁棒的. 定理 3.2 也说明, $\forall\lambda=(\phi,A)\in Q_2$, 因 $h(E_2(\lambda_n,\varepsilon,E_2(\lambda))\to 0$ $(\lambda_n=(\phi_n,A_n)\to\lambda=(\phi,\lambda),\varepsilon_n\to 0)$, 可以用近似平衡点集 $E_2(\lambda_n,\varepsilon_n)$ 来近似代替平衡点集 $E_2(\lambda)$, 也表明平衡点集 $E_2(\lambda)$ 是稳定的.

4 平衡问题的良定性

上一节通过对平衡问题构建有限理性模型, 研究了平衡问题结构稳定性和鲁棒性. 本节将利用有限理性模型研究平衡问题的良定性.

利用非线性问题的有限理性模型对非线性问题的不同良定性建立统一模式进行统一研究是俞建教授首创的一种方法 (见 [18, 第六章]), 下面结合平衡问题对不同良定性的统一模式加以介绍.

回 第二节介绍的有限理性模型 $M=\{\Lambda,X,F,\Phi\}$, 其中 Λ 是一个平衡问题空间, $\forall\lambda\in\Lambda$, λ 表示一个平衡问题; $F:\Lambda\to 2^X$ 是一个集值映射, $\forall\lambda\in\Lambda$, $F(\lambda)\subset X$ 表示平衡问题 λ 的可行集; $\Phi:\Lambda\times X\to R$ 是理性函数, 当 $x\in F(\lambda)$ 时, $\Phi(\lambda,x)\geq 0$. $\forall\varepsilon\geq 0$, $E(\lambda,\varepsilon)=\{x\in F(\lambda):\Phi(\lambda,x)\leq\varepsilon\}$ 表示平衡问题 λ 的 ε- 近似平衡点集, 当 $\varepsilon=0$ 时, $E(\lambda)=E(\lambda,0)=\{x\in F(\lambda):\Phi(\lambda,x)=0\}$ 表示平衡问题 λ 的解集.

设 Λ 和 X 都是度量空间, $\lambda\in\Lambda$.

定义 4.1 (1) 如果 $\forall\lambda_n\in\Lambda$, $\lambda_n\to\lambda$, $\forall x_n\in E(\lambda_n,\varepsilon_n)$, 其中 $\varepsilon_n\to 0$, 必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k}\to x\in E(\lambda)$, 则称问题 λ 是广义良定的, 简记为 G-wp.

(2) 如果 $E(\lambda)=\{x\}$ (单点集), $\forall\lambda_n\in\Lambda$, $\lambda_n\to\lambda$, $\forall x_n\in E(\lambda_n,\varepsilon_n)$, 其中 $\varepsilon_n\to 0$, 必有 $x_n\to x$, 则称问题 λ 是良定的, 简记为 wp.

定义 4.2 (1) 如果 $\forall x_n\in E(\lambda,\varepsilon_n)$, 其中 $\varepsilon_n\to 0$, 必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k}\to x\in E(\lambda)$, 则称问题 λ 是广义 Tykhonov 良定的, 简记为 GT-wp.

(2) 如果 $E(\lambda)=\{x\}$ (单点集), $\forall x_n\in E(\lambda,\varepsilon_n)$, 其中 $\varepsilon_n\to 0$, 必有 $x_n\to x$, 则称问题 λ 是 Tykhonov 良定的, 简记为 T-wp.

定义 4.3 (1) 如果 $\forall\lambda_n\in\Lambda$, $\lambda_n\to\lambda$, $\forall x_n\in E(\lambda_n)$, 必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k}\to x\in E(\lambda)$, 则称问题 λ 是广义 Hadamard 良定的, 简记为 GH-wp.

(2) 如果 $E(\lambda)=\{x\}$ (单点集), $\forall\lambda_n\in\Lambda$, $\lambda_n\to\lambda$, $\forall x_n\in E(\lambda_n)$, 必有 $x_n\to x$, 则称问题 λ 是 Hadamard 良定的, 简记为 H-wp.

定义 4.4 (1) 如果 $\forall x_n\in X$, $|\Phi(\lambda,x_n)|\leq\varepsilon_n$, 其中 $\varepsilon_n\to 0$, 且 X 中的距离

$d(x_n, F(\lambda)) \to 0$, 必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \to x \in E(\lambda)$, 则称问题 λ 是广义 Levitin-Polyak 良定的，简记为 GLP-wp.

(2) 如果 $E(\lambda) = \{x\}$ (单点集), $\forall\, x_n \in X$, $|\Phi(\lambda, x_n)| \le \varepsilon_n$, 其中 $\varepsilon_n \to 0$, 且 X 中的距离 $d(x_n, F(\lambda)) \to 0$, 必有 $x_n \to x$, 则称问题 λ 是 Levitin-Polyak 良定的，简记为 LP-wp.

定义 4.5 (1) 如果 $\forall\, \lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda$, $\forall\, x_n \in X$, $\Phi(\lambda_n, x_n) \le \varepsilon_n$, 其中 $\varepsilon_n \to 0$, 且 X 中的距离 $d(x_n, f(\lambda_n)) \to 0$, 必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \to x \in E(\lambda)$, 则称问题 λ 是广义强良定的，简记为 GS-wp.

(2) 如果 $E(\lambda) = \{x\}$ (单点集), $\forall\, \lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda$, $\forall\, x_n \in X$, $\Phi(\lambda_n, x_n) \le \varepsilon_n$, 其中 $\varepsilon_n \to 0$, 且 X 中的距离 $d(x_n, f(\lambda_n)) \to 0$, 必有 $x_n \to x$, 则称问题 λ 是强良定的，简记为 S-wp.

关于上述几种良定性的关系， [18] 给出了下述重要结论.

定理 B (1) 如果问题 $\lambda \in \Lambda$ 是 GS-wp, 则 λ 必是 G-wp, GLP-wp, GH-wp 和 GT-wp.

(2) 如果问题 $\lambda \in \Lambda$ 是 S-wp, 则 λ 必是 wp, LP-wp, H-wp 和 T-wp.

进一步， [18] 还给出了问题 $\lambda \in \Lambda$ 是 GS-wp 和 S-wp 的充分条件，以定理 C 列出如下：

定理 C 给定有限理性模型 $M = \{\Lambda, X, F, \Phi\}$, $\lambda \in \Lambda$, 如果

(1) $F : \Lambda \to 2^X$ 在 λ 是上半连续的且 $F(\lambda)$ 是非空紧集；

(2) $\Phi : \Lambda \times X \to R$ 满足当 $x \in F(\lambda)$ 时 $\Phi(\lambda, x) \ge 0$, 且 Φ 关于 (λ, x) 是下伪连续的；则

(a) 问题 λ 必是 GS-wp;

(b) 如果 $E(\lambda) = \{x\}$ (单点集), 则问题 λ 必是 S-wp.

4.1 紧度量空间下平衡问题解的良定性

根据第三节，设 X_1 是紧度量空间，对于平衡问题空间 Λ_1, 其有限理性模型 $M_1 = \{\Lambda_1, X_1, F_1, \Phi_1\}$, 其中 $\forall\, \lambda \in \Lambda_1$, $\forall\, x \in X_1$, $F_1(\lambda) = X_1$, $\Phi_1(\lambda, x) = -\inf\limits_{y \in X_1} \phi(x, y)$, $E_1(\phi) = \{x \in X_1 : \phi(x, y) \ge 0,\ \forall\, y \in X_1\}$.

根据定义，我们容易证明下面引理.

引理 4.1 $\forall\, \lambda \in \Lambda_1$, $F_1(\lambda)$ 在 λ 处连续，且 $F_1(\lambda)$ 为非空紧集.

由引理 3.3, 可知 $\Phi_1(\lambda, x)$ 对 (λ, x) 是下半连续的，从而是下伪连续的，又根据 定理 C, $\forall\, \lambda \in \Lambda_1$, 其满足良定的充分条件，于是我们得到以下定理.

定理 4.1 给定平衡问题的有限理性模型 $M_1 = \{\Lambda_1, X_1, F_1, \Phi_1\}$, $\lambda \in \Lambda_1$, 平衡问题 λ 必是 GS-wp, 且当 $E(\lambda) = \{x\}$, 则平衡问题 λ 必是 S-wp.

又根据 定理 B, 显然得到以下推论.

推论 4.1 (1) $\forall\, \lambda \in \Lambda_1$, 平衡问题 λ 是 GS-wp, 从而也是 G-wp, GLP-wp, GH-wp 和 GT-wp;

(2) 当 $E_1(\lambda) = \{x\}$ (单点集), 平衡问题 λ 是 S-wp, 从而也是 wp, LP-wp, H-wp 和 T-wp.

注 4.1 平衡问题 λ 是 GS-wp, 是指 $\forall\lambda_m\in\Lambda_1,\ \lambda_m\to\lambda,\ x_m\in X_1,\ \Phi_1(\lambda_m,x_m)\le\varepsilon_m$, 其中 $\varepsilon_m\to 0$ 且 X 中的距离 $d(x_m,F_1(\lambda_m))\to 0$, 必存在 $\{x_m\}$ 的子序列 $\{x_{m_k}\}$, 使 $x_{m_k}\to x\in E_1(\lambda)$. 由 $x_m\in X_1$, 且 $\Phi_1(\lambda_m,x_m)\le\varepsilon_m$, 即 $\inf\limits_{y\in X_1}\phi_m(x_m,y)\ge-\varepsilon_m$, $\{x_{m_k}\}$ 是一个渐近序列，因为 $\varepsilon_{m_k}\to 0,\ x_{m_k}\to x,\lambda_{m_k}\to\lambda(\phi_{m_k}\to\phi)$, 有 $\inf\limits_{y\in X_1}\phi((x,y)\ge 0$, 即 x 是平衡问题 $\lambda=(\phi)$ 的平衡点.

4.2 非紧度量空间下平衡问题解的良定性

设 X_2 是一个完备度量空间，对于前面第三节的平衡问题空间 Λ_2, 其有限理性模型 $M_2=\{\Lambda_2,X_2,F_2,\Phi_2\}$, 其中 $\forall\lambda\in\Lambda_2,\ \forall x\in X_2,F_2(\lambda)=A,\ \Phi_2(\lambda,x)=-\inf\limits_{y\in A}\phi(x,y)$, $E_2(\lambda)=\{x\in A:\phi(x,y)\ge 0,\ \forall y\in A\}$.

根据定义，我们容易证明下面引理.

引理 4.2 $\forall\lambda\in\Lambda_2,\ F_2(\lambda)$ 在 λ 处连续且 $F_2(\lambda)$ 为紧集.

由引理 3.6 可知， $\Phi_2(\lambda,x)$ 在 (λ,x) 是连续的，从而是下伪连续的，根据 定理 C, $\forall\lambda\in\Lambda_2$, 同样满足良定的充分条件，于是我们可以得到 定理 4.2.

定理 4.2 给定平衡问题的有限理性模型 $M_2=\{\Lambda_2,X_2,F_2,\Phi_2\}$, $\forall\lambda\in\Lambda_2$, 则平衡问题 λ 必是 GS-wp, 若 $E_2(\lambda)=\{x\}$, 则平衡问题 λ 必是 S-wp.

类似的，我们得到以下推论.

推论 4.2 (1) $\forall\lambda\in\Lambda_2$, 平衡问题 λ 是 GS-wp, 从而也是 G-wp, GLP-wp, GH-wp 和 GT-wp;

(2) 当 $E_2(\lambda)=\{x\}$ (单点集), 平衡问题 λ 是 S-wp 的，从而也是 wp, LP-wp, H-wp 和 T-wp.

注 4.2 平衡问题 λ 是 GS-wp, 是指 $\forall\lambda_m\in\Lambda_2,\ \lambda_m\to\lambda,\ x_m\in X_2,\ \Phi_2(\lambda_m,x_m)\le\varepsilon_m$, 其中 $\varepsilon_m\to 0$ 且 X 中的距离 $d(x_m,F_2(\lambda_m))\to 0$, 必存在 $\{x_m\}$ 的子序列 $\{x_{m_k}\}$, 使 $x_{m_k}\to x\in E_2(\lambda)$. 由 $\lambda_m\to\lambda$, 即 $\phi_m\to\phi,\ A_m\to A,\Phi_2(\lambda_m,x_m)\le\varepsilon_m$, 即 $\inf\limits_{y\in A_m}\phi_m(x_m,y)\ge-\varepsilon_m$, 又由于 $\Phi_2(\lambda,x)$ 在 (λ,x) 是连续的，于是 $\{x_{m_k}\}$ 是一个渐近序列，因为 $\varepsilon_{m_k}\to 0,\ x_{m_k}\to x,\ \lambda_{m_k}\to\lambda(\phi_{m_k}\to\phi,\ A_{m_k}\to A)$, 有 $\inf\limits_{y\in A}\phi((x,y)\ge 0$, 即 x 是平衡问题是 $\lambda=(\phi,A)$ 的平衡点.

4.3 良定的平衡问题的特征刻画定理

在这一节，我们给出统一的平衡问题良定性的特征刻画.

给定平衡问题的有限理性模型 $M=\{\Lambda,X,F,\Phi\}$, 其中 $\Lambda,\ X$ 是度量空间， $\forall\lambda\in\Lambda$, $F:\lambda\to 2^X,\ \ \Phi:\Lambda\times X\to R$.

记

$$L(\lambda,\varepsilon)=\big\{x\in X:\ d(x,F(\lambda))\le\varepsilon,\ |\Phi(\lambda,x)|\le\varepsilon\big\}.$$

定理 4.3.1 (1) 如果平衡问题 λ 是 GLP-wp, 则非紧测度 $\alpha(L(\lambda,\varepsilon))\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$;

(2) 如果 X 是完备度量空间， $F(\lambda)$ 是非空闭集，当 $x\in F(\lambda)$ 时， $\Phi(\lambda,x)\ge 0$ 且 Φ 对 x 是下伪连续的，非紧测度 $\alpha(L(\lambda,\varepsilon))\to 0\ (\varepsilon\to 0)$, 则平衡问题 λ 必是 GLP-wp.

证 (1) 首先证明 $E(\lambda)$ 是紧集, 对 X 中的任意序列 $\{x_n\} \subset E(\lambda)$, 则 $x_n \in L(\lambda, \varepsilon_n)$, 其中 $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \to 0$, 因问题 λ 是 GLP-wp, $\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} \to x \in E(\lambda)$, 因此 $E(\lambda)$ 必是紧集. $\forall\, \delta > 0$, 存在 $E(\lambda)$ 的开覆盖 C_δ, 其中 C_δ 由有限个直径小于等于 δ 的开集组成. 以下来证明当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 必有 $\alpha(L(\lambda, \varepsilon)) \leq \delta$, 从而有 $\alpha(L(\lambda, \varepsilon)) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$.

用反证法，如果以上结论不成立，则存在 $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ 及 X 中的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n \in L(\lambda, \varepsilon_n)$, 而 $x_n \notin C_\delta$. 因问题 λ 是 GLP-wp, $\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \to x \in E(\lambda) \subset C_\delta$, x 是开集 C_δ 的内点，这与 $x_{n_k} \to x$ 而 $x_{n_k} \notin C_\delta$ 矛盾.

(2) $\forall\, x_n \in L(\lambda, \varepsilon_n)$, 其中 $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \to 0$, 不妨设 $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$, 故 $L(\lambda, \varepsilon_n) \supset E(\lambda, \varepsilon_{n+1})$. 记 $C_n = \{x_i : i \geq n\}$, 则 $C_n \subset L(\lambda, \varepsilon_n)$. 注意到 $\alpha(C_1) = \alpha(C_n), n = 2, 3, \cdots$, $\alpha(C_n) \leq \alpha(L(\lambda, \varepsilon_n))$ 及 $\alpha(L(\lambda, \varepsilon_n)) \to 0$ $(n \to \infty)$, 得 $\alpha(C_1) = 0$. 因 X 是完备度量空间, 由引理 2.2, $\overline{C_1}$ 必是紧集， $\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \to x$. 因 $x_{n_k} \in L(\lambda, \varepsilon_{n_k})$, $\alpha(x_{n_k}, f(\lambda)) \leq \varepsilon_{n_k}$, 令 $n_k \to \infty$, 得 $d(x, F(\lambda)) = 0$, 因 $F(\lambda)$ 是闭集，有 $x \in F(\lambda)$. 以下证明 $x \in E(\lambda)$.

用反证法. 如果 $x \notin E(\lambda)$, 因 $x \in F(\lambda)$, 故 $\Phi(\lambda, x) > 0$. 又由于 $E(\lambda) \neq \emptyset$, 取 $\overline{x} \in E(\lambda)$, 则 $0 = \Phi(\lambda, \overline{x}) < \Phi(\lambda, x)$, 由 Φ 对 x 是下伪连续的，

$$0 = \Phi(\lambda, \overline{x}) < \varliminf_{n_k \to \infty} \Phi(\lambda, x_{n_k}) \leq \varliminf_{n_k \to \infty} \varepsilon_{n_k} = 0,$$

矛盾. 从而 $x \in E(\lambda)$, 问题 λ 必是 GLP-wp. 证毕.

根据 注 2.2, 我们得到以下推论.

推论 4.3.1 如果 X 是完备度量空间， $F(\lambda)$ 是非空闭集，当 $x \in F(\lambda)$ 时 $\Phi(\lambda, x) \geq 0$ 且 Φ 对 x 是下半连续的，非紧测度 $\alpha(L(\lambda, \varepsilon)) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$, 则平衡问题 λ 必是 GLP-wp.

定理 4.3.2 (1) 如果平衡问题 λ 是 LP-wp, 则直径 $d(L(\lambda, \varepsilon)) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$;

(2) 如果 X 是完备度量空间， $F(\lambda)$ 是非空闭集，当 $x \in F(\lambda)$ 时， $\Phi(\lambda, x) \geq 0$ 且 Φ 对 x 是下伪连续的，直径 $d(L(\lambda, \varepsilon)) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$, 则平衡问题 λ 必是 LP-wp.

证 (1) 用反证法, 如果结论不成立, 则存在 $\delta > 0$ 及序列 $\{\varepsilon_n\}$, 其中 $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, 而 $d(L(\lambda, \varepsilon_n)) \geq \delta$. 于是存在两个序列 $\{u_n\}$ 及 $\{v_n\}$, $u_n, v_n \in L(\lambda, \varepsilon_n)$, 而 $d(u_n, v_n) > \frac{\delta}{2}$. 因 λ 是 LP-wp, 必有 $E(\lambda) = \{x\}$, 且 $u_n \to x$, $v_n \to x$, 与 $d(u_n, v_n) > \frac{\delta}{2}$ 矛盾.

$\forall x_n \in L(\lambda, \varepsilon_n)$, 其中 $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, 不妨设 $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$, 因 X 是完备度量空间， $L(\lambda, \varepsilon_1) \supset L(\lambda, \varepsilon_2) \supset L(\lambda, \varepsilon_3) \supset \cdots$, $\overline{L(\lambda, \varepsilon_1)} \supset \overline{L(\lambda, \varepsilon_2)} \supset \cdots$, 且直径 $d(\overline{L(\lambda, \varepsilon_n)}) = d(L(\lambda, \varepsilon_n)) \to 0$ $(n \to \infty)$, 故存在唯一的 $x \in X$, 使 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{L(\lambda, \varepsilon_n)} = \{x\}$. 且 $x_n \to x$. 因 $d(x_n, F(\lambda)) \leq \varepsilon_n$,

令 $n \to \infty$, 得 $d(x, F(\lambda)) = 0$. 因 $F(\lambda)$ 是闭集，必有 $x \in F(\lambda)$. 以下证明 $x \in E(\lambda)$.

用反证法. 如果 $x \notin E(\lambda)$, 因 $x \in F(\lambda)$, 故 $\Phi(\lambda, x) > 0$. 又由于 $E(\lambda) \neq \emptyset$, 取 $\overline{x} \in E(\lambda)$, 则 $0 = \Phi(\lambda, \overline{x}) < \Phi(\lambda, x)$, 由 Φ 对 x 是下伪连续的，

$$0 = \Phi(\lambda, \overline{x}) < \varliminf_{n_k \to \infty} \Phi(\lambda, x_{n_k}) \leq \varliminf_{n_k \to \infty} \varepsilon_{n_k} = 0,$$

矛盾. 从而 $x \in E(\lambda)$, 问题 λ 必是 LP-wp. 证毕.

类似的，我们得到 推论 4.3.2.

推论 4.3.2 如果 X 是完备度量空间，$F(\lambda)$ 是非空闭集，当 $x \in F(\lambda)$ 时，$\Phi(\lambda, x) \geq 0$ 且 Φ 对 x 是下半连续的，直径 $d(L(\lambda, \varepsilon)) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$，则平衡问题 λ 必是 LP-wp.

注 4.3 [18] 中的 定理 6.7.3 和 定理 6.7.4 给出了统一的非线性问题的的 GT-wp 和 T-wp 的特征刻画，对平衡问题依然成立.

注 4.4 [15] 通过带参数的平衡问题的近似解集的直径刻画其良定性，而 [16] 给出了平衡问题的 T-wp 的特征刻画和其充分条件.

参 考 文 献

[1] Blum E, Oettli W. From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems. *Math. Student*, 1994, 63: 123-145

[2] Nikaido H, Isoda K. Note on Noncooperative Convex Game. *Pacif. J. Math.*, 1955, 5: 807–815

[3] Gwinner J. On the Penalty Method for Constrained Variational Inequalities. In: J.-B.Hiriart-Urruty, W. Oettli, J. Store (Eds.), Optimization: Theory and Algorithms, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York: Dekker, 1983, 86: 197–211

[4] Casrellani M, Pappalardo M, Passacantando M. Existence Results for Nonconvex Equilibrium Problems. *Optim. Method. Soft.*, 2010, 25: 49–58

[5] Facchinei F, Kanzow C. Generalized Nash Equilibrium Problems. *Annal. Oper. Res.*, 2010, 175: 177–211

[6] Anderlini L, Canning D. Structural Stability Implies Robustness to Bounded Rationality. *J. Econ. Theory*, 2001, 109: 395–422

[7] Yu C, Yu J. On Structural Stability and Robustness to Bounded Rationality. *Nonlin. Anal. TMA*, 2006, 65: 583–592

[8] Yu C, Yu J. Bounded Rationality in Multiobjective Games. *Nonlin. Anal. TMA*, 2007, 67: 930–937

[9] Yu J, Yang H, Yu C. Structural Stability and Robustness to Bounded Rationality for Non-compact Cases. *J. Glob. Optim.*, 2009, 29: 999–1008

[10] 俞建. 几类考虑有限理性平衡问题解的稳定性. 系统科学与数学, 2009, 29: 999–1008
(Yu J. Bounded rationality and stability of solutions of some equilibrium problems. *J. Sys. Sci. and Math. Scis.* 2009, 29: 999–1008)

[11] Tykhonov A N. On the Stability of the Functional Optimization Problem. *USSR Comp. Math. Phys.*, 1966, 4: 28–33

[12] Levitin E S, Polyak B T. Convergence of Minimizing Sequences in Conditional Extremum Problems. *Soviet Math. Dohl.*, 1966, 7: 764–767

[13] Dontchev A L, Zolezzi T. Well-posed Optimization Problems. Berlin: Springer Verlag, 1993

[14] Lucchetti R, Revalski J (eds). Recent Developments in Well-posed Variational Problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995

[15] Fang Y P, Hu R, Huang N J. Well-posedness for Equilibrium Problems and for Optimization Problems with Equilibrium Constraints. *Comput. Math. Appl.*, 2008, 55: 89–100

[16] Bianchi M, Kassay G, Pini R. Well-posed Equilibrium Problems. *Nonlin. Anal.*, 2010, 72: 460–468

[17] 俞建. 关于良定问题. *应用数学学报*, 2011, 34: 1007–1022
(Yu. On Well-posed Problems. *Acta Math. Appl. Sin.*, 2011, 34(6): 1007–1022)

[18] 俞建. 博弈论与非线性分析续论. 北京：科学出版社， 2011
(Yu J. Game Theory and Nonlinear Analysis (Continued). Beijing: Science Press, 2011

[19] Yu J. Essential Equilibria of N-person Noncooperative Games. *J. Math. Econ.*, 1999, 31: 361–372

[20] Morgan J, Scalzo V. Pseudocontinuous Functions and Existence of Nash Equilibria. *J. Math. Econ.*, 2007, 43: 174–183

[21] Yu J. Essential Weak Efficient Solution in Multiobjective Optimization Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, 166: 230–235

The Bounded Rationality and Well-posedness on Equilibrium Problems

QIU Xiaoling† Peng Dingtao WANG Chun CHEN Pinbo

(*College of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang* 550025*, China*)

(† *E-mail: xlqiu@gzu.edu.cn*)

Abstract In this paper, we establish the bounded rationality model M for the equilibrium problems in the setting of compact and noncompact sets. We proof that equilibrium problems in the sense of Baire category are structurally stable and robust to ε-equilibrium. Then, by using the model M, we study the unification of well-posedness for equilibrium problems. Sufficient conditions for the well-posedness for equilibrium problems are given. Finally, we obtain the well-posed characterizations for equilibrium problems.

Key words equilibrium problem; bounded rationality; structural stability; well-posedness; well-posed characterizations

MR(2000) Subject Classification 90C48; 91A10; 91A26

Chinese Library Classification O177.9