第57卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.57, No.2
2014年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)02-0373-14 **文献标识码: A**

几类非线性问题解的通有唯一性

彭定涛

贵州大学理学院 贵阳 550025
北京交通大学理学院 北京 100044
E-mail: dingtaopeng@126.com

俞建

贵州大学理学院 贵阳 550025
E-mail: sci.jyu@gzu.edu.cn

修乃华

北京交通大学理学院 北京 100044
E-mail: nhxiu@bjtu.edu.cn

摘　要 本文首先给出集值映射的几个通有唯一性定理,然后将其应用于研究极大极小问题、向量优化问题和不动点问题等解的唯一性. 本文证明了,在Baire分类意义下,大多数极大极小问题、向量优化问题和不动点问题都有唯一解.

关键词 通有唯一性;集值映射;极大极小问题;向量优化问题;不动点问题
MR(2010)主题分类 47H04; 47H10; 90C29; 90C31; 90C47
中图分类 O224; O177.91

Generic Uniqueness of Solutions of Several Types of Nonlinear Problems

Dingtao PENG

College of Science, Guizhou University, Guiyang 550025*, Guizhou, P. R. China*
and School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044*, P. R. China*
E-mail: dingtaopeng@126.com

Jian YU

College of Science, Guizhou University, Guiyang 550025*, Guizhou, P. R. China*
E-mail: sci.jyu@gzu.edu.cn

Naihua XIU

School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044*, P. R. China*
E-mail: nhxiu@bjtu.edu.cn

收稿日期: 2012-08-10; 接受日期: 2013-08-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11171018, 71271021)和贵州省科学技术基金资助项目(20102133).

Abstract We first present several generic uniqueness theorems for set-valued mappings, then apply them to investigate the uniqueness of the solutions of max-min problems, vector optimization problems and fixed point problems etc. As results, we prove that, in the sense of Baire's category, most of the problems in the space consisting of max-min problems (respectively, vector optimization problems and fixed point problems) have unique solution.

Keywords generic uniqueness; set-valued mapping; max-min problem; vector optimization problem; fixed point problem

MR(2010) Subject Classification 47H04; 47H10; 90C29; 90C31; 90C47

Chinese Library Classification O224; O177.91

1 引言

近年来,与最优化问题相关的各种非线性问题解的通有唯一性受到了很多关注,也取得了一些成果. 1984年, Kenderov [7] 研究了约束优化问题解的唯一性,得到一个重要结论:大多数最优化问题有唯一解. Beer [3] 将[7]的结论推广到Čech-完备空间上的约束优化问题. 1988年, Kenderov 和Ribarska [8]又证明了大多数二人零和连续博弈有唯一平衡点. 在[9]中,他们还证明了大多数由连续函数决定的极大极小问题有唯一解. Yu [20], Xiang 和Yin [18] 分别研究了多目标优化问题弱有效解和有效解的稳定性,他们的结果以[3]的主要结论为特例. Tan, Yu 和Yuan [16] 研究了一般二元函数鞍点的唯一性,得到了鞍点通有唯一性结论,从而推广了[8]的主要结果. 最近, Zaslavski [23, 24] 在度量空间中研究了鞍点问题、最优化问题和平衡问题解的通有唯一性; Yu, Peng 和Xiang [21] 证明了一类平衡问题平衡点的通有唯一性; Peng, Yu 和Xiu [12]证明了一类向量Ky Fan不等式解的通有唯一性. 然而,总的来说,关于通有唯一性的结果并不太多.

在文[13]中, 作者对集值映射给出了几个一般通有唯一性定理,并指出它们提供了研究通有唯一性的一种统一方法, 作者还应用该统一方法研究了最优化问题、鞍点问题和变分不等式问题等解的唯一性. 作为[13]的延续和发展,本文 一步用该统一方法研究极大极小问题、向量优化问题和不动点问题等解的唯一性.

下面回顾一下集值映射的有关概念和引理.

定义 1.1[1, 3] 设$X; M$为两个Hausdorff拓扑空间, 2^X表示X中非空子集全体,$S: M \to 2^X$是一个集值映射,$u \in M$.

(1) 称S在u是上半连续的,如果对X中的任何开集$G; G \supset S(u)$,存在M中u的开邻域$O(u)$,使$\forall u' \in O(x)$, 有$G \supset S(u')$;

(2) 称S在u是下半连续的,如果对X中的任何开集$G; G \cap S(u) \neq \emptyset$, 存在$M$中$u$的开邻域$O(u)$,使$\forall u' \in O(u)$, 有$G \cap S(u') \neq \emptyset$;

(3) 称S在u是连续的,如果S在u既上半连续又下半连续;

(4) 称S在M上是(上半,下半)连续的,如果S在M中的每一点都是(上半,下半)连续的;

(5) 称S具有非空紧值,如果$\forall u \in M; S(u)$是非空紧集;

(6) 称S是一个usco映射,如果S在M上是上半连续的且具有非空紧值;

(7) 称S在u是几乎下半连续的,如果存在$x \in S(u)$,使对x的任意开邻域$U(x)$,存在u开邻域$O(u)$, 使对任意的$u' \in O(u)$,有$S(u') \cap U(x) \neq \emptyset$;

(8) 称S是闭映射,如果S的图$\mathrm{Graph}(S) := \{(u, x) \in M \times X : x \in S(u)\}$是$M \times X$中的闭集;

(9) M的一个子集Q称为剩余集,如果Q包含一列在M中处处稠密的开子集的交集.

易见,如果$S : M \to 2^X$在u下半连续,它必在u几乎下半连续,但反之不真.

引理 1.2[1] 如果$S : M \to 2^X$是闭映射且X是紧集,则S必是一个usco映射.

引理 1.3[6, 17] 设M是一个Baire空间,X是一个度量空间,$S : M \to 2^X$是一个usco映射,则存在M中一个处处稠密的剩余集Q,使$\forall u \in Q$, S在u是下半连续的,从而是连续的.

注 1.4 如果Baire空间M中存在一个处处稠密的剩余集Q,使对任意$u \in Q$, 依赖于u的性质P都成立,则称P是M上的通有性质(generic property), 或者说性质P在M上是通有的. 由于Q必是第二纲集,我们就说,在Baire分类的意义下,对M中的大多数点,性质P都是成立的. 关于通有性质的研究(包括通有存在性、通有唯一性、通有稳定性、通有良定性等) 已经取得了丰富的研究成果,如[2, 10, 14, 15, 22]及其参考文献.

定义 1.5[3, 7] 称M是一个Čech完备空间,如果M可作为一个处处稠密的剩余子集嵌入到一个Hausdorff紧拓扑空间中.

定义 1.6[3, 7] 称Hausdorff拓扑空间X属于$\mathcal{L}$类,如果对每个Čech完备空间M,每个usco 映射$S : M \to 2^X$都在M的某个稠密剩余子集上几乎下半连续.

注 1.7[3, 7] 每个局部紧的Hausdorff拓扑空间是Čech完备空间; 每个完备度量空间是Čech完备空间; 每个Čech完备空间是Baire空间; 每个度量空间都属于$\mathcal{L}$类; 每个Banach空间按弱拓扑(不可度量化)属于$\mathcal{L}$类[5]; 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$都属于$\mathcal{L}$类,则$\prod_{i=1}^{n} X_i$也属于$\mathcal{L}$类;

2 唯一性和通有唯一性定理

本节的主要内容在[13]中得到,由于不长且很关键,为完整起见,仍陈述如下.

设M, X是两个Hausdorff拓扑空间,$S : M \to 2^X$是一个集值映射,$u \in M$. 下述条件(C)将在唯一性研究中起到关键作用:

(C) 对两个任意开集$G_1, G_2 \subset X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $S(u) \cap G_1 \neq \emptyset$ 和u的任意开邻域O, 存在$u' \in O \backslash \{u\}$,使$S(u') \cap G_2 = \emptyset$.

我们将看到,为使$S(u)$成为单点集,条件(C)有时是充分的,有时是必要的,甚至有时既是充分的也是必要的.

定理 2.1 设$S : M \to 2^X$在点u是上半连续的.如果$S(u)$是单点集,则条件(C)在点u必成立.

证明 设$G_1, G_2 \subset X$是任意两个开集且$G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $S(u) \cap G_1 \neq \emptyset$, 再设$O$为$u$的任一个开邻域. 因$S(u)$是单点集,故$S(u) \subset G_1$. 由于$S$在$u$是上半连续的,存在$u$的开邻域$O_1$,使对任意$u' \in O_1$, $S(u') \subset G_1$. 因O也是u的开邻域,故$O \cap O_1 \neq \emptyset$. 取$u' \in (O \cap O_1) \backslash \{u\}$,则$u' \in O \backslash \{u\}$,且$S(u') \subset G_1$. 因$G_1 \cap G_2 = \emptyset$,故

$$S(u') \cap G_2 = \emptyset.$$

这证明条件(C)在点u成立. □

定理 2.2 设$S: M \to 2^X$在点u是几乎下半连续的. 如果条件(C)在点u成立,则$S(u)$是单点集.

证明 由于S在点u几乎下半连续,存在$\bar{x} \in S(u)$,使对$\bar{x}$的任何开邻域U, 存在u的开邻域O,满足对任意$u' \in O$; $S(u') \cap U \neq \emptyset$.

用反证法.假设$S(u)$不是单点集,则存在$x' \in S(u)$,使$x' \neq \bar{x}$. 由Hausdorff空间的分离性,存在两个开集$G_1; G_2 \subset X$,使$x' \in G_1; \bar{x} \in G_2$,且$G_1 \cap G_2 = \emptyset$. 于是,有

$$S(u) \cap G_1 \neq \emptyset \text{ 和 } S(u) \cap G_2 \neq \emptyset: \tag{2.1}$$

一方面,由于G_2是$\bar{x}$的开邻域,前已证存在u的开邻域$O(u)$,使对任意$u' \in O$,有

$$S(u') \cap G_2 \neq \emptyset: \tag{2.2}$$

另一方面,由于$G_1 \cap G_2 = \emptyset$; $S(u) \cap G_1 \neq \emptyset$以及条件(C)在$u$成立,对上述开邻域$O(u)$, 存在$u' \in O(u)$,使

$$S(u') \cap G_2 = \emptyset;$$

这与(2.2)矛盾. 因此,$S(u)$是单点集. □

推论 2.3 设$S: M \to 2^X$在点u是下半连续的. 如果条件(C)在点u成立,则$S(u)$是单点集.

结合定理2.1和定理2.2,可得如下定理:

定理 2.4 设$S: M \to 2^X$在点u是上半连续和几乎下半连续的, 则$S(u)$是单点集当且当条件(C)在点u成立.

推论 2.5 设$S: M \to 2^X$在点u是连续的, 则$S(u)$是单点集当且 当条件(C)在点u成立.

由引理1.3和推论2.5,得如下结论:

定理 2.6 设M是Baire空间,X是度量空间,$S: M \to 2^X$是一个usco映射. 如果在M中的每一点条件(C)都成立,则存在M中处处稠密的剩余集Q,使对任意的$u \in Q$; $S(u)$是一个单点集, 即映射S在Q上是单值的.

以下推论更常用:

推论 2.7 设M是完备度量空间,X是度量空间,$S: M \to 2^X$是一个usco映射. 如果在M中的每一点条件(C)都成立,则存在M中处处稠密的剩余集Q,使对任意的$u \in Q$; $S(u)$是一个单点集, 即映射S在Q上是单值的.

从定义1.5、定义1.6和定理2.2,可得以下定理:

定理 2.8 设M是Čech完备空间,X属于$\mathcal{L}$类,$S: M \to 2^X$是一个usco映射. 如果在M中的每一点条件(C)都成立,则存在M中处处稠密的剩余集Q,使对任意的$u \in Q$; $S(u)$是一个单点集, 即映射S在Q上是单值的.

下面来说明,如何应用上述定理来研究非线性问题解的唯一性. 设M是"问题"空间,对每一$u \in M$; u表示一个非线性问题, X是"解"空间,问题u的解都在X中,$S: M \to 2^X$是一个集值映射, 对每一$u \in M$; $S(u)$表示非线性问题u的解的全体,$S(u) \neq \emptyset$. 当$S(u)$是单点集$\{x\}$时,非线性问题u有唯一解x. 如果解映射S在u下半连续或几乎下半连续, 那么只需证明条件(C)在u成立,则可得到非线性问题u的解是唯一的. 我们知道,非线性问题解的唯一性并不总是成立的,那么可以研究通有唯一性, 于是,定理2.6、推论2.7和定理2.8等通有唯一性结果提供了研究通有唯一性的一般模式或统一框架.

3 应用

作为上节结果的应用, 本节用统一方法研究极大极小问题、向量优化问题和非线性映射不动点问题等解的通有唯一性.

§3.1 大多数半连续函数的极大极小问题有唯一解

设$X;Y$是两个非空集合,$f:X\times Y\to R$是一个函数,所谓的极大极小问题是求$(x^*;y^*)\in X\times Y$,使

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y}f(x;y)=\min_{y\in Y}f(x^*;y)=f(x^*;y^*):$$

如果满足条件的$(x^*;y^*)$存在,则称$(x^*;y^*)$是极大极小问题的一个解. 与极大极小问题相对应的是极小极大问题,即求$(x^*;y^*)\in X\times Y$,使

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}f(x;y)=\max_{x\in X}f(x;y^*)=f(x^*;y^*):$$

类似地,称$(x^*;y^*)$是极小极大问题的一个解.

众所周知,要使$(x^*;y^*)\in X\times Y$是函数f的鞍点, 则$(x^*;y^*)$必须既是极大极小问题的解,也是极小极大问题的解. 但反之,极大极小问题的解可以不是极小极大问题的解,从而不是函数f的鞍点. 因此,虽然[13, 16]已经研究过鞍点的唯一性,但并不能代替对极大极小问题的研究.

在本小节余下部分,设$X;Y$分别是Hausdorff拓扑空间$E;F$中的非空紧子集. 极大极小问题空间M_1定义为:

$$M_1=\left\{f:X\times Y\to R:\ \begin{array}{c} f\ \text{在}X\times Y\text{上是下半连续的};\\ \forall y\in Y;\ x\to f(x;y)\ \text{在}X\text{上是上半连续的};\\ \sup\limits_{(x,y)\in X\times Y}|f(x;y)|<+\infty:\end{array}\right\}$$

对任意$f_1;f_2\in M_1$, 定义距离

$${}_1(f_1;f_2)=\sup_{(x,y)\in X\times Y}|f_1(x;y)-f_2(x;y)|:$$

引理 3.1 设$f:X\times Y\to R$满足:$\forall x\in X;\ y\to f(x;y)$在$Y$上是下半连续的, 且$\forall y\in Y;\ x\to f(x;y)$在$X$上是上半连续的, 则$x\to v(x):=\min\limits_{y\in Y}f(x;y)$在$X$上是上半连续的.

证明 因$\forall x\in X;\ y\to f(x;y)$在$Y$上是下半连续的,且$Y$是紧的, 故函数$v(\cdot)$在$X$上是有定义的. 设$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subset X;\ x_\alpha\to x\in X$, 则存在$y_\alpha;\ y\in Y$,使$v(x_\alpha)=f(x_\alpha;y_\alpha)$和$v(x)=f(x;y)$. 又因为$x\to f(x;y)$在$X$上是上半连续的,故

$$\limsup_{\alpha}v(x_\alpha)=\limsup_{\alpha}f(x_\alpha;y_\alpha)\le\limsup_{\alpha}f(x_\alpha;y)\le f(x;y)=v(x);$$

这表明$x\to v(x)$在X上是上半连续的. □

容易证明下述引理.

引理 3.2 $(M_1;\ {}_1)$是一个完备度量空间.

对每一$f\in M_1$,根据引理3.1和$X;Y$的紧性,极大极小问题f的解必存在, 记其解集为$S_1(f)$,则$f\to S_1(f)$定义了一个集值映射$S_1:M_1\to 2^{X\times Y}$.

引理 3.3 $S_1:M_1\to 2^{X\times Y}$是一个usco映射.

证明 因$X \times Y$是$E \times F$中的非空紧集,根据引理1.2, 只需证明S_1是闭映射, 即Graph(S_1)是$M_1 \times (X \times Y)$中的闭集,其中

$$\mathrm{Graph}(S_1) = \{(f; (x; y)) \in M_1 \times (X \times Y) : \ (x; y) \in S_1(f)\}:$$

设$\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset M_1; \ f_\alpha \to f_0 \in M_1; \ (x_\alpha; y_\alpha) \in S_1(f_\alpha); \ x_\alpha \to x_0 \in X; \ y_\alpha \to y_0 \in Y$, 需证明$(x_0; y_0) \in S_1(f_0)$.

由$(x_\alpha; y_\alpha) \in S_1(f_\alpha)$,知

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f_\alpha(x; y) = \min_{y \in Y} f_\alpha(x_\alpha; y) = f_\alpha(x_\alpha; y_\alpha):$$

记$v_\alpha(x) := \min\limits_{y \in Y} f_\alpha(x; y)$和$v_0(x) := \min\limits_{y \in Y} f_0(x; y)$, 则有

$$v_\alpha(x) \le v_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha; y_\alpha); \ \forall x \in X: \tag{3.1}$$

因$f_\alpha(x; \cdot)$和$f_0(x; \cdot)$在紧集Y上都是下半连续的, 故存在$y'_\alpha; y'' \in Y$,使$v_\alpha(x) = f_\alpha(x; y'_\alpha)$和$v_0(x) = f_0(x; y'')$. 因

$$- \ {}_1(f_\alpha; f_0) \le f_\alpha(x; y'_\alpha) - f_0(x; y'_\alpha) \le v_\alpha(x) - v_0(x) \le f_\alpha(x; y'') - f_0(x; y'') \le \ {}_1(f_\alpha; f_0);$$

故

$$|v_\alpha(x) - v_0(x)| \le \ {}_1(f_\alpha; f_0) \to 0; \ \forall x \in X: \tag{3.2}$$

根据引理3.1, $v_0(\cdot)$是上半连续的,再由(3.2)和$x_\alpha \to x_0$,得

$$\begin{aligned} \limsup_\alpha v_\alpha(x_\alpha) &= \limsup_\alpha [(v_\alpha(x_\alpha) - v_0(x_\alpha)) + (v_0(x_\alpha) - v_0(x_0)) + v_0(x_0)] \\ &\le \limsup_\alpha [v_0(x_\alpha) - v_0(x_0)] + v_0(x_0) \le v_0(x_0): \end{aligned} \tag{3.3}$$

在(3.1)和(3.2)中取$x = x_0$,则得

$$\liminf_\alpha v_\alpha(x_\alpha) \ge \liminf_\alpha v_\alpha(x_0) = \lim_\alpha v_\alpha(x_0) = v_0(x_0): \tag{3.4}$$

由(3.3)和(3.4),得

$$\lim_\alpha v_\alpha(x_\alpha) = v_0(x_0): \tag{3.5}$$

因f_0在$X \times Y$上是下半连续的,$x_\alpha \to x_0; \ y_\alpha \to y_0$,故

$$\begin{aligned} v_0(x_0) &= \lim_\alpha v_\alpha(x_\alpha) = \lim_\alpha f_\alpha(x_\alpha; y_\alpha) \\ &= \lim_\alpha [(f_\alpha(x_\alpha; y_\alpha) - f_0(x_\alpha; y_\alpha)) + (f_0(x_\alpha; y_\alpha) - f_0(x_0; y_0)) + f_0(x_0; y_0)] \\ &\ge -\lim_\alpha \ {}_1(f_\alpha; f_0) + \liminf_\alpha [f_0(x_\alpha; y_\alpha) - f_0(x_0; y_0)] + f_0(x_0; y_0) \\ &\ge f_0(x_0; y_0)): \end{aligned}$$

另一方面,有$v_0(x_0) = \min\limits_{y \in Y} f_0(x_0; y) \le f_0(x_0; y_0)$, 与上式结合,得

$$v_0(x_0) = f_0(x_0; y_0): \tag{3.6}$$

由(3.1) (3.2) (3.5)和(3.6), 对任意$x \in X$,有$v_0(x) \le v_0(x_0) = f_0(x_0; y_0)$,即

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f_0(x; y) = \min_{y \in Y} f_0(x_0; y) = f_0(x_0; y_0);$$

这就证明了$(x_0; y_0) \in S_1(f_0)$.证毕. □

引理 3.4 对任何$f \in M_1$,条件(C)成立,即对任意两个开集$G_1; G_2 \subset X;\ G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $S_1(f) \cap G_1 \neq \emptyset$ 和f的任意开邻域$O \subset M_1$,存在$f' \in O \backslash \{f\}$,使$S_1(f') \cap G_2 = \emptyset$.

证明 设$G_1; G_2 \subset X \times Y$是两个开集,满足$G_1 \cap G_2 = \emptyset;\ S_1(f) \cap G_1 \neq \emptyset$. 取$(x_1; y_1) \in S_1(f) \cap G_1$, 则存在两个开集$X_1 \subset X; Y_1 \subset Y$,使$(x_1; y_1) \in X_1 \times Y_1 \subset G_1$.

因X是紧Hausdorff空间,它必是完全正则的, 因此,存在连续函数$g : X \to [0; 1]$,使$g(x_1) = 0$,且对任意$x \in X \setminus X_1;\ g(x) = 1$. 类似地,因$Y$是紧Hausdorff空间,它也是完全正则的, 存在连续函数$h : Y \to [0; 1]$,使$h(y_1) = 0$,且对任意$y \in Y \setminus Y_1;\ h(y) = 1$.

对每一$n = 1; 2; \cdots$,定义函数$f_n : X \times Y \to R$如下:

$$f_n(x; y) := f(x; y) - \frac{1}{n} g(x)h(y);\ \forall (x; y) \in X \times Y:$$

容易验证,$f_n \in M_1$,且 $_1(f_n; f) \to 0$.

下面证明,对每一$n = 1; 2; \cdots;\ S_1(f_n) \cap G_2 = \emptyset$. 用反证法.假设存在$n_0 > 0$和$(x_{n_0}; y_{n_0}) \in X \times Y$,使$(x_{n_0}; y_{n_0}) \in S_1(f_{n_0}) \cap G_2$. 因$G_1 \cap G_2 = \emptyset$,故或者$x_{n_0} \in X \backslash X_1$,或者$y_{n_0} \in Y \backslash Y_1$. 不失一般性,不妨设$x_{n_0} \in X \backslash X_1$,则$g(x_{n_0}) = 1$,且$(x_{n_0}; y_{n_0}) \in S_1(f_{n_0})$. 记

$$v_{n_0} := \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f_{n_0}(x; y) \quad 和 \quad v_0 := \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x; y):$$

于是,有

$$\begin{aligned} v_{n_0} &= \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f_{n_0}(x; y) = \min_{y \in Y} f_{n_0}(x_{n_0}; y) = \min_{y \in Y} \left[f(x_{n_0}; y) - \frac{1}{n_0} g(x_{n_0})h(y)\right] \\ &= \min_{y \in Y} f(x_{n_0}; y) - \frac{1}{n_0} \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x; y) - \frac{1}{n_0} = v_0 - \frac{1}{n_0}: \end{aligned} \tag{3.7}$$

另一方面,由$(x_1; y_1) \in S_1(f)$和$g(x_1) = 0$,得

$$\begin{aligned} v_0 &= \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x; y) = \min_{y \in Y} f(x_1; y) = \min_{y \in Y} \left[f(x_1; y) - \frac{1}{n_0} g(x_1)h(y)\right] \\ &= \min_{y \in Y} f_{n_0}(x_1; y) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f_{n_0}(x; y) = v_{n_0}: \end{aligned} \tag{3.8}$$

结合(3.7)和(3.8),得

$$v_0 \leq v_{n_0} \leq v_0 - \frac{1}{n_0};$$

矛盾.这就证明对每一$n = 1; 2; \cdots;\ S_1(f_n) \cap G_2 = \emptyset$.

设$O \subset M_1$是f的任一开邻域,因 $_1(f_n; f) \to 0$,必存在$f_{n_0} \in O \backslash \{f\}$. 取$f' := f_{n_0}$,则$S_1(f') \cap G_2 = S_1(f_{n_0}) \cap G_2 = \emptyset$.这就证明了条件(C)在$f$成立. □

定理 3.5 如果$X; Y$都属于$\mathcal{L}$类,则存在M_1中处处稠密的剩余集Q_1,使对任意$f \in Q_1$, $S_1(f)$是单点集, 即极大极小问题f有唯一解.

证明 因M_1是完备度量空间,它必是Čech完备空间.因$X; Y$属于$\mathcal{L}$类,$X \times Y$也属于$\mathcal{L}$类. 根据引理3.3,引理3.4以及定理2.8, 存在M_1中处处稠密的剩余集Q_1,使对任意$f \in Q_1;\ S_1(f)$是单点集. □

推论 3.6 如果$X; Y$分别是度量空间$E; F$中的非空紧子集,则存在M_1中处处稠密的剩余集Q_1',使对任意$f \in Q_1'$, 极大极小问题f有唯一解.

注 3.7 定理3.5将[9]中定理3.1对$f \in M_1$的连续性要求减弱为半连续性, 且本文使用了不同的方法.

§3.2 大多数严格拟单调向量优化问题有唯一解

本小节用统一方法研究向量优化问题弱有效解的唯一性.

设X是Hausdorff拓扑空间E中的一个非空紧子集, C是Banach空间$(H;\|\cdot\|)$中的非空闭凸尖锥,且$\mathrm{int}C \neq \emptyset$, 其中$\mathrm{int}C$表示$C$的拓扑内部.于是,由[19]可知,$\mathrm{int}C$也是凸锥, 且$\mathrm{int}C + C \subset \mathrm{int}C$. 对 $\ > 0$, 记开球$B^{\circ}(\ ) := \{z \in H : \|z\| < \ \}$ 和闭球$B(\ ) := \{z \in H : \|z\| \leq \ \}$.

定义 3.8 ([4, 11]) 设$f : X \to H$是向量值函数,称点$x^* \in X$是向量优化问题f的一个弱有效解, 如果对任意$y \in X$,总有

$$f(x^*) - f(y) \notin \mathrm{int}C:$$

当$H = R^n; C = R^n_+$时,上述向量优化问题变为多目标优化问题,其弱有效解$x^* \in X$满足

$$f(x^*) - f(y) \notin \mathrm{int}R^n_+; \ \forall y \in X:$$

定义 3.9 ([4, 11]) 称向量值函数$f : X \to H$在$x \in X$是C-下半连续的,如果对任何 $\ > 0$,存在x在X中的开邻域U,使$\forall x' \in U$,有

$$f(x') \in f(x) + B^{\circ}(\ ) + C;$$

称f在X上是C-下半连续的,如果f在X中每一点都是C-下半连续的; 称f在X上是C-上半连续的,如果$-f$在X上是C-下半连续的.

定义 3.10 称向量值函数$f : X \to H$在X上是C-严格拟单调的,如果对任意$x; y \in X; \ x \neq y$,下述蕴含关系成立:

$$f(x) - f(y) \notin \mathrm{int}C \ \Rightarrow \ f(y) - f(x) \in C:$$

例 3.11 设$X = [-1; 1] \subset R; \ H = R^2; \ C = R^2_+$.令$f(x) = (1 - |x|; 1 - |x|); \ \forall x \in X$. 容易验证: f在X上既是C-下半连续,也是C-上半连续的,还是C-严格拟单调的, 且$x = \pm 1 \in X$均为向量优化问题f的弱有效解.

向量优化问题空间M_2规定如下

$$M_2 = \left\{ f : X \to H : \begin{array}{l} f\text{在}X\text{上是}C\text{-下半连续的;} \\ f\text{在}X\text{上是}C\text{-严格拟单调的;} \\ \sup_{x \in X} \|f(x)\| < +\infty: \end{array} \right\}$$

对任意$f_1; f_2 \in M_2$, 定义距离

$$\ _2(f_1; f_2) = \sup_{x \in X} \|f_1(x) - f_2(x)\|;$$

则$(M_2; \ _2)$是一个度量空间.

引理 3.12 $(M_2; \ _2)$是一个完备度量空间.

证明 设$\{f_n\} \subset M_2$是一个Casuchy列,即$\forall \ > 0$,存在正整数$N > 0$, 使当$m; n > N$时,有

$$\ _2(f_m; f_n) = \sup_{x \in X} \|f_m(x) - f_n(x)\| < \ :$$

因H是一个Banach空间,故对任意$x \in X$, 存在$f(x) \in H$,使当$n > N$时,有

$$\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \ :$$

容易证明,f在X上是C-下半连续的,以及$\sup_{x \in X} \|f(x)\| < +\infty$.

对任意$x;y\in X;\ x\neq y$,设$f(x)-f(y)\notin \mathrm{int}C$. 因$\mathrm{int}C$是开集,且$\lim\limits_{n\to\infty}[f_n(x)-f_n(y)]=f(x)-f(y)$, 故当$n$充分大时,有$f_n(x)-f_n(y)\notin \mathrm{int}C$. 由$f_n$的$C$-严格拟单调性,得$f_n(y)-f_n(x)\in C$. 再根据$C$的闭性和$\lim\limits_{n\to\infty}[f_n(y)-f_n(x)]=f(y)-f(x)$, 得$f(y)-f(x)\in C$. 这就证明了,$f$在$X$上是$C$-严格拟单调的.

综上,可得$f\in M_2$,且 $_2(f_n;f)\to 0$,故$(M_2;\ _2)$是完备度量空间. □

对每一$f\in M_2$,根据[11, 推论5.10],向量优化问题f的弱有效解必存在, 记其解集为$S_2(f)$, 则$f\to S_2(f)$定义了一个集值映射$S_2:M_2\to 2^X$.

引理 3.13 $S_2:M_2\to 2^X$是一个usco映射.

证明 因X是紧的,根据引理1.2, 只需证明S_2是闭映射, 即S_2的图像Graph(S_2)是$M_2\times X$中的闭集,其中

$$\mathrm{Graph}(S_2)=\{(f;x)\in M_2\times X: x\in S_2(f)\}:$$

设$f_\alpha\in M_2;\ \ \in\Lambda;\ f_\alpha\to f_0\in M_2;\ x_\alpha\in S_2(f_\alpha);\ x_\alpha\to x_0$, 只需证明$x_0\in S_2(f_0)$.

用反证法.假设$x_0\notin S_2(f_0)$,则存在$y_0\in X$, 使$f_0(x_0)-f_0(y_0)\in \mathrm{int}C$. 因$\mathrm{int}C$是开集,存在 >0,使

$$f_0(x_0)-f_0(y_0)+B^\circ(\ )\subset \mathrm{int}C: \tag{3.9}$$

因$f_\alpha\to f_0;\ x_\alpha\to x_0$,且$f_0$在$X$是$C$-下半连续的, 存在 $_0\in\Lambda$,使对任意 $\succ\ _0$,

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_\alpha) &= f_\alpha(x_\alpha)-f_0(x_\alpha)+f_0(x_\alpha)-f_0(x_0)+f_0(x_0)\\ &\in B^\circ(\tfrac{}{3})+B^\circ(\tfrac{}{3})+C+f_0(x_0); \end{aligned} \tag{3.10}$$

且

$$\begin{aligned} -f_\alpha(y_0) &= f_0(y_0)-f_\alpha(y_0)-f_0(y_0)\\ &\in B^\circ(\tfrac{}{3})-f_0(y_0): \end{aligned} \tag{3.11}$$

由(3.9)-(3.11),对任意 $\succ\ _0$,有

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_\alpha)-f_\alpha(y_0) &\in f_0(x_0)-f_0(y_0)+B^\circ(\ )+C\\ &\subset \mathrm{int}C+C\subset \mathrm{int}C: \end{aligned}$$

但由$x_\alpha\in S_2(f_\alpha)$,得

$$f_\alpha(x_\alpha)-f_\alpha(y_0)\notin \mathrm{int}C;$$

矛盾.因此,必有$x_0\in S_2(f_0)$.证毕. □

引理 3.14 对任何$f\in M_2$,条件(C)成立,即对任意两个开集$G_1;G_2\subset X;\ G_1\cap G_2=\emptyset;\ S_2(f)\cap G_1\neq\emptyset$ 和f的任意开邻域$O\subset M_2$,存在$f'\in O\backslash\{f\}$,使$S_2(f')\cap G_2=\emptyset$.

证明 设$G_1;G_2\subset X$是两个开集,满足$G_1\cap G_2=\emptyset;\ S_2(f)\cap G_1\neq\emptyset$. 取$x_1\in S_2(f)\cap G_1$,定义函数$g:X\to[0;1]$如下:

$$g(x):=\begin{cases} 0; & \text{if } x=x_1;\\ 1; & \text{if } x\neq x_1; \end{cases}\quad \forall x\in X:$$

显然,g在X上是下半连续的.

取$z \in \mathrm{int}C$.对每一$n = 1; 2; \cdots$,定义函数$f_n : X \to H$如下:

$$f_n(x) := f(x) + [\frac{1}{n} g(x)]\ z;\ \forall x \in X:$$

对每一$n = 1; 2; \cdots$,我们来证明$f_n \in M_2$.

(1) 容易验证,f_n在X上是C-下半连续的.

(2) 对任意$x; y \in X;\ x \neq y$,设$f_n(x) - f_n(y) \notin \mathrm{int}C$. 如果$x \neq x_1;\ y = x_1$,则$g(x) = 1;\ g(x_1) = 0$. 因$x_1 \in S_2(f);\ f(x_1) - f(x) \notin \mathrm{int}C$. 由$f$的$C$-严格拟单调性,得$f(x) - f(x_1) \in C$. 于是

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_n(y) &= f_n(x) - f_n(x_1) = f(x) - f(x_1) + \frac{1}{n}[g(x) - g(x_1)]\ z \\ &= f(x) - f(x_1) + \frac{1}{n}\ z \in C + \mathrm{int}C \subset \mathrm{int}C; \end{aligned}$$

这与$f_n(x) - f_n(y) \notin \mathrm{int}C$矛盾. 所以, 有下面两种情况成立:第一,$x = x_1$而$y \neq x_1$;第二,$x \neq x_1$且$y \neq x_1$.

当$x = x_1;\ y \neq x_1$时,有$g(x_1) = 0;\ g(y) = 1$.由$x_1 \in S_2(f)$和f的C-严格拟单调性,可得$f(y) - f(x_1) \in C$. 而,

$$\begin{aligned} f_n(y) - f_n(x) &= f_n(y) - f_n(x_1) = f(y) - f(x_1) + \frac{1}{n}[g(y) - g(x_1)]\ z \\ &= f(y) - f(x_1) + \frac{1}{n}\ z \in C + \mathrm{int}C \subset \mathrm{int}C \subset C: \end{aligned} \tag{3.12}$$

当$x \neq x_1;\ y \neq x_1$时,有$g(x) = g(y) = 1$. 此时,

$$f(x) - f(y) = f_n(x) - f_n(y) \notin \mathrm{int}C:$$

再由f的C-严格拟单调性,得$f(y) - f(x) \in C$,从而

$$f_n(y) - f_n(x) = f(y) - f(x) \in C: \tag{3.13}$$

从(3.12)和(3.13),可知只要$x \neq y$,下述蕴含关系总成立:

$$f_n(x) - f_n(y) \notin \mathrm{int}C \ \Rightarrow\ f_n(y) - f_n(x) \in C:$$

也就是说f_n在X上是C-严格拟单调性的.

(3) $\sup\limits_{x \in X} \|f_n(x)\| \le \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\| + \frac{1}{n} \cdot \|z\| < +\infty$.

以上证明了对每一$n = 1; 2; \cdots;\ f_n \in M_2$. 而, $_2(f_n; f) \le \frac{\|z\|}{n} \to 0$,当$n \to \infty$时.

下面证明,对每一$n = 1; 2; \cdots;\ S_2(f_n) \cap G_2 = \emptyset$. 用反证法.假设存在正整数$n_0 > 0$和$x_{n_0} \in X$, 使$x_{n_0} \in S_2(f_{n_0}) \cap G_2$, 则$x_{n_0} \in G_2;\ x_{n_0} \neq x_1;\ g(x_{n_0}) = 1$,且对任意$y \in X$,有$f_{n_0}(x_{n_0}) - f_{n_0}(y) \notin \mathrm{int}C$. 取$y = x_1$,得

$$\begin{aligned} f(x_{n_0}) - f(x_1) + \frac{1}{n_0}\ z &= f(x_{n_0}) - f(x_1) + \frac{1}{n_0}[g(x_{n_0}) - g(x_1)]\ z \\ &= f_{n_0}(x_{n_0}) - f_{n_0}(x_1) \notin \mathrm{int}C: \end{aligned} \tag{3.14}$$

注意到$\frac{1}{n_0}\ z \in \mathrm{int}C$, 如果$f(x_{n_0}) - f(x_1) \in C$,则有$f_{n_0}(x_{n_0}) - f_{n_0}(x_1) \in C + \mathrm{int}C \subset \mathrm{int}C$, 这与(3.14)矛盾,因此

$$f(x_{n_0}) - f(x_1) \notin C: \tag{3.15}$$

由$x_1 \in S_2(f)$,对任意$y \in X;\ f(x_1) - f(y) \notin \mathrm{int}C$. 取$y = x_{n_0}$,可得$f(x_1) - f(x_{n_0}) \notin \mathrm{int}C$. 再由$f$的$C$-严格拟单调性,得

$$f(x_{n_0}) - f(x_1) \in C;$$

这与(3.15)矛盾. 因此,对每一$n = 1; 2; \cdots;\ S_2(f_n) \cap G_2 = \emptyset$.

设$O \subset M_2$是f的任一开邻域,因 $_2(f_n; f) \to 0$,必存在$f_{m_0} \in O\backslash\{f\}$. 取$f' := f_{m_0}$,则$S_2(f') \cap G_2 = S_2(f_{m_0}) \cap G_2 = \emptyset$.这就证明了条件(C)在$f$成立. □

定理 3.15 如果X属于$\mathcal{L}$类,则存在M_2中处处稠密的剩余集Q_2,使对任意$f \in Q_2;\ S_2(f)$是单点集, 即向量优化问题f有唯一解.

证明 因M_2是完备度量空间,它必是Čech完备的,X属于$\mathcal{L}$类, 根据引理3.13,引理3.14以及定理2.8, 存在M_2中处处稠密的剩余集Q_2,使对任意$f \in Q_2;\ S_2(f)$是单点集. □

注意到,当$H = R; C = [0; +\infty)$时,$f(x) - f(y) \notin \mathrm{int}C \iff f(y) - f(x) \in C$. 可得如下推论,它正是[13, 定理4.1].

推论 3.16 设$M_2' = \{f : X \to R : f$在X上是下半连续的,且 $\sup\limits_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$. 如果$X$属于$\mathcal{L}$类,则存在$M_2'$中处处稠密的剩余集$Q_2'$,使对任意$f \in Q_2'$, 最优化问题$\min_{x \in X} f(x)$有唯一解.

§3.3 大多数非扩张映射有唯一不动点

本小节用统一方法研究非扩张映射不动点的唯一性.

设X是Banach空间$(E; \|\cdot\|)$中的非空凸紧集. 设M_3是所有非扩张映射$f : X \to X$的集合, 其中$f : X \to X$是非扩张的,指$\|f(x) - f(y)\| \le \|x - y\|;\ \forall x; y \in X$.

对任意$f_1; f_2 \in M_3$, 定义距离

$$_3(f_1; f_2) = \max_{x \in X} \|f_1(x) - f_2(x)\|;$$

对$f_1; f_2 \in M_3$,易见$f_1; f_2$是连续的,因X是紧的,故 $_3$是有意义的, 容易证明,$(M_3;\ _3)$是一个完备度量空间.

对任意$f \in M_3$,根据Schauder不动点定理,函数f必在X中存在不动点,即$S_3(f) := \{x \in X : f(x) = x\} \neq \emptyset$, 则$f \to S_3(f)$定义了一个集值映射$S_3 : M_3 \to 2^X$.

引理 3.17 $S_3 : M_3 \to 2^X$是一个usco映射.

证明 因X是非空紧集,根据引理1.2, 只需证明S_3是闭映射, 即Graph(S_3)是$M_3 \times X$中的闭集,其中

$$\mathrm{Graph}(S_3) = \{(f; x) \in M_3 \times X :\ x \in S_3(f)\}:$$

设$f_n \in M_3;\ f_n \to f_0 \in M_3;\ x_n \in S_3(f_n);\ x_n \to x_0 \in X$, 需证明$x_0 \in S_3(f_0)$.

由$x_n \in S_3(f_n)$,知

$$f_n(x_n) = x_n: \tag{3.16}$$

因$f_n \to f_0;\ x_n \to x_0$,故

$$\begin{aligned} \|f_n(x_n) - f_0(x_0)\| &\le \|f_n(x_n) - f_0(x_n)\| + \|f_0(x_n) - f_0(x_0)\| \\ &\le\ _3(f_n; f_0) + \|x_n - x_0\| \to 0: \end{aligned}$$

在(3.16)中,令$n \to \infty$,得$f_0(x_0) = x_0$,即$x_0 \in S_3(f_0)$. □

引理 3.18 对任何$f \in M_3$,条件(C)成立,即对任意两个开集$G_1; G_2 \subset X;\ G_1 \cap G_2 = \emptyset;\ S_3(f) \cap G_1 \neq \emptyset$ 和f的任意开邻域$O \subset M_3$,存在$f' \in O \backslash \{f\}$,使$S_3(f') \cap G_2 = \emptyset$.

证明 设$G_1; G_2 \subset X$是两个开集,满足$G_1 \cap G_2 = \emptyset;\ S_3(f) \cap G_1 \neq \emptyset$. 取$x_1 \in S_3(f) \cap G_1$,则$x_1 \in G_1$,且$f(x_1) = x_1$.

对每一$n = 1; 2; \cdots$,定义函数$f_n : X \to X$如下:

$$f_n(x) := (1 - \frac{1}{n})f(x) + \frac{1}{n}\ x_1;\ \forall x \in X:$$

因$f \in M_3$,故

$$\|f(x) - f(y)\| \le \|x - y\|;\ \forall x; y \in X;$$

所以,

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f_n(y)\| &= (1 - \frac{1}{n})\|f(x) - f(y)\| \\ &\le (1 - \frac{1}{n})\|x - y\| \\ &< \|x - y\|; \quad \forall x; y \in X: \end{aligned} \tag{3.17}$$

这表明,对每一$n = 1; 2; \cdots;\ f_n \in M_3$. 由于$f$在紧集$X$上连续,

$$c =: \max_{x \in X}\{\|f(x)\| + \|x\|\} < +\infty:$$

因此, $\,_3(f_n; f) \le \frac{c}{n} \to 0$,当$n \to \infty$时.

下面证明,对每一$n = 1; 2; \cdots;\ S_3(f_n) \cap G_2 = \emptyset$. 用反证法.假设存在正整数$n_0 > 0$和$x_{n_0} \in X$, 使$x_{n_0} \in S_3(f_{n_0}) \cap G_2$, 则$x_{n_0} \in G_2;\ x_{n_0} \neq x_1$,且$x_{n_0} \in S_3(f_{n_0})$. 因$x_{n_0} \in S_3(f_{n_0})$,故

$$f_{n_0}(x_{n_0}) = x_{n_0}: \tag{3.18}$$

因$f(x_1) = x_1$,有

$$f_{n_0}(x_1) = (1 - \frac{1}{n_0})f(x_1) + \frac{1}{n_0}\ x_1 = (1 - \frac{1}{n_0})x_1 + \frac{1}{n_0}\ x_1 = x_1: \tag{3.19}$$

由(3.18)和(3.19),得

$$\|f_{n_0}(x_{n_0}) - f_{n_0}(x_1)\| = \|x_{n_0} - x_1\|:$$

但不等式(3.17)表明

$$\|f_{n_0}(x_{n_0}) - f_{n_0}(x_1)\| < \|x_{n_0} - x_1\|;$$

矛盾.因此,对每一$n = 1; 2; \cdots;\ S_3(f_n) \cap G_2 = \emptyset$.

设$O \subset M_3$是f的任一开邻域,因 $\,_3(f_n; f) \to 0$,必存在$f_{m_0} \in O \backslash \{f\}$. 取$f' := f_{m_0}$,则$S_3(f') \cap G_2 = S_3(f_{m_0}) \cap G_2 = \emptyset$.这就证明了条件(C)在$f$成立. □

定理 3.19 存在M_3中处处稠密的剩余集Q_3,使对任意$f \in Q_3;\ S_3(f)$是单点集, 即映射f有唯一不动点.

证明 因M_3是完备度量空间,X是Banach空间中的子集, 根据引理3.17, 引理3.18 以及推论2.7, 存在M_3中处处稠密的剩余集Q_3,使对任意$f \in Q_3;\ S_3(f)$是单点集. □

4 结论

本文以集值映射为工具,利用唯一性的统一研究方法,证明了在满足一定条件的极大极小问题(或向量优化问题、映射不动点问题)构成的空间中, 存在处处稠密的剩余集,使得该剩余集中每一个极大极小问题(或向量优化问题、映射不动点问题)都有唯一解.由于该剩余集在整个问题空间中处处稠密, 从而如果某个极大极小问题(或向量优化问题、映射不动点问题)解不唯一,可用一列具有唯一解的极大极小问题(或向量优化问题、映射不动点问题)任意逼近. 此外,由于该剩余集是第二纲的,本文结论表明,在Baire分类意义下,大多数极大极小问题(或向量优化问题、映射不动点问题)都有唯一解.

致谢 本文作者感谢审稿人耐心细致地审阅了全文.

参 考 文 献

[1] Aliprantis C. D., Border, K. C., Infinite Dimensional Analysis (3rd ed.), Berlin, Springer-Verlag, 2006.

[2] Anh L. Q., Khanh P. Q., On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.*, 2007, **135**: 271–284.

[3] Beer G., On a generic optimization theorem of Petar Kenderov, *Nonlinear Anal.*, 1988, **12**: 627–655.

[4] Chen G. Y., Huang X. X., Yang X. Q., Vector Optimization: Set-Valued and Variational Analysis, Berlin, Springer, 2005.

[5] Christensen J. P. R., Theorems of Namioka and Johnsonn type for upper semi-continuous and compact valued setvalued mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1982, **86**: 649–655.

[6] Fort M. K., Points of continuity of semicontinuous functions, *Publ. Math. Debrecen*, 1951, **2**: 100–102.

[7] Kenderov P. S., Most of the optimization problems have unique solution, in Proceedings, Oberwolfach on Parametric Optimization (B. Brosowski and F. Deutsch Eds.), Birkhäuser International Series of Numerical Mathematics, Vol 72, Birkhäuser, Basel, 1984: 203–216.

[8] Kenderov P. S., Ribarska N. K., Most of the two person zero-sum games have unique solution, Workshop / Mini-Conference on Functional Analysis and Optimization, Canberra, 1988: 73–82.

[9] Kenderov P. S., Ribarska N. K., Generic uniqueness of the solution of max-min problems, in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol 304, Berlin, Springer-Verlag, 1988: 41–48.

[10] Khanh P. Q., Quan N. H., Generic stability and essential components of generalized KKM points and applications, *J. Optim. Theory Appl.*, 2011, **148**: 488–504.

[11] Luc D. T., Theory of Vector Optimization, Berlin, Springer-Verlag, 1989.

[12] Peng D. T., Yu J., Xiu N. H., Generic uniqueness of solutions for a class of vector Ky Fan inequalities, *J. Optim. Theory Appl.*, 2012, **155**: 165–179.

[13] Peng D. T., Yu J., Xiu N. H., Generic uniqueness theorems with some applications, *J. Glob. Optim.*, 2013, **56**: 713–725.

[14] Peng L. H., Li C., Yao J. C., Generic well-posedness for perturbed optimization problems in Banach spaces, *Taiwanese J. Math.*, 2010, **14**: 1351–1369.

[15] Reich S., Zaslavski A. J., Generic existence of fixed points for set-valued mappings, *Set-Valued Anal.*, 2002, **10**: 287–296.

[16] Tan K. K., Yu J., Yuan X. Z., The uniqueness of saddle points, *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 1995, **43**: 119–129.

[17] Tan K. K., Yu J., Yuan X. Z., The stability of Ky Fan's points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995, **123**: 1511–1519.

[18] Xiang S. W., Yin W. S., Stability results for efficient solutions of vector optimization problems, *J. Optim. Theory Appl.*, 2007, **134**: 385–398.

[19] Yang H., Yu J., Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points, *Appl. Math. Letter*, 2002, **15**: 553–560.

[20] Yu J., Essential weak effficient solution in multiobjective optimization problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, **166**: 230–235.

[21] Yu J., Peng D. T., Xiang S. W., Generic uniqueness of equilibrium points, *Nonlinear Anal.*, 2011, **74**: 6326–6332.

[22] Yu J., Xiang S.W., The stability of the set of KKM points, *Nonlinear Anal.*, 2003, **54**: 839–844.

[23] Zaslavski A. J., Generic existence of a saddle point, *Comm. Appl. Anal.*, 2004, **8**: 143–151.

[24] Zaslavski A. J., Optimization on Metric and Normed Spaces, Springer, New York, 2010.